АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

III

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

РЕФЕРАТЫ

9В1—9В377

*

U. I. C.
AUG 20 1974
LIBRARY

№ 9 1961
ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР доктор физ.-матем. наук *Р. В. Гамкрелидзе*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: академик *П. С. Александров*, академик *А. Н. Колмогоров*, профессор *Л. Д. Кудрявцев*, профессор *В. И. Левин*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, профессор *С. М. Никольский*, академик *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, член-корреспондент АН СССР *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *Н. М. Остиану*

СОДЕРЖАНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика
- Теория вероятностей 9В1
- Математическая статистика 9В86
- Теория игр, исследование операций и математическая экономика 9В134
- Применение теоретико-вероятностных и статистических методов . . 9В183

Численные и графические методы 9В258
- Таблицы 9В317

Вычислительные машины и математические приборы 9В325
- Применение вычислительных машин . . . . . —

Авторский указатель

Адрес редакции: Москва, А-219, Балтийская улица, 14

Технический редактор *Н. Н. Гомза*

Подписано в печать 21/IX-1961 г. Формат бумаги 84×108¹/₁₆ Тираж 1015

Печ. л. 4,5 Усл. печ. л. 7,38 Уч.-изд. л. 12,26 Заказ 3111

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, г. Москва, Люберцы, Октябрьский пр., 403

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Рефераты 9В1—9В377 **№ 9** **Сентябрь 1961 г.**

594.те 1967

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор *О. В. Сарманов*

9 В1. Основы теории вероятностей. Mayer Joseph. The rudiments of probability theory. «School Sci. and Math.», 1960, **60**, № 7, 553—566 (англ.)

9 В2. Поправка к статье о теореме восстановления. Morimura Hidenori. Correction to the paper «on a renewal theorem». «Kodai Math. Semin. Repts», 1958, **10**, № 1, 46 (англ.)

См. РЖМат, 1961, 3В19

9 В3. Информация о VI совещании по теории вероятностей и математической статистике.— «Теория вероятностей и ее применения», 1961, **6**, № 1, 140—144

9 В4. Понятие вероятности. Пань И-минь. «Шусюэ тунбао, Shuxue tongbao», 1960, № 6, 238—243 (кит.)

9 В5. Интуитивная вероятность на конечных множествах. Kraft Charles H., Pratt John W., Seidenberg A. Intuitive probability on finite sets. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 2, 408—419 (англ.)

Если на всех подмножествах α конечного множества $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ задана мера $v(\alpha)$, то их можно упорядочить по величине этой меры: $\alpha \succ \beta \Leftrightarrow v(\alpha) \geqslant v(\beta)$. Отношение $\succ$ удовлетворяет условиям: (С) для любых α, β либо $\alpha \succ \beta$, либо $\beta \succ \alpha$; (Т) если $\alpha \succ \beta$ и $\beta \succ \gamma$, то $\alpha \succ \gamma$; (А) пусть γ не пересекается с α и β; тогда $\alpha \succ \beta$ в том и только том случае, когда $\alpha \cup \gamma \succ \beta \cup \gamma$. Финетти высказал гипотезу, что любое упорядочение подмножеств конечного множества, удовлетворяющее условиям (С), (Т) и (А), порождено некоторой мерой. В статье эта гипотеза опровергается. Построен противоречащий пример с $n = 5$. Разбирается вопрос о том, какие дополнительные условия надо наложить на отношение порядка $\succ$, чтобы оно порождалось некоторой мерой. Отношение $\alpha \succ \beta$ связывается с понятием интуитивной вероятности (событие β не менее вероятно события α).

Б. А. Севастьянов

9 В6. Замечание о совершенной вероятности. Kallianpur Gopinath. A note on perfect probability. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 1, 169—172 (англ.)

Рассматривая множества на прямой, автор вводит понятие совершенного вероятностного пространства. Тройка (Ω, F, μ) называется совершенным вероятностным пространством, если для любой однозначной вещественной F-измеримой функции выполняется следующее: для любого множества A такого, что $f^{-1}(A) \in F$, существует борелевское множество B, для которого $\mu\{f^{-1}(B)\} = \mu\{f^{-1}(A)\}$. Ставится вопрос об определении классов измеримых пространств (Ω, F) таких, что для любой вероятностной меры μ пространство (Ω, F, μ) совершенно. Описывается один из таких классов, который автор называет D-пространствами.

Ю. П. Студнев

9 В7. Об инвариантных вероятностных мерах. I. Blum J. R., Hanson D. L. On invariant probability measures. I. «Pacif. J. Math.», 1960, **10**, № 4, 1125—1129 (англ.)

Пусть Ω — произвольное множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, T — взаимно однозначное измеримое вместе с T^{-1} отображение Ω на себя, $\mathfrak{P}$ — множество всех вероятностных мер на $\mathfrak{A}$, относительно которых T инвариантно, $\mathfrak{A}_1 = \{A \in \mathfrak{A} : TA = A\}$ и $\mathfrak{P}_1$ — подмножество $\mathfrak{P}$, состоящее из тех вероятностных мер, относительно которых T эргодично. $\mathfrak{P}$ выпукло. $\mathfrak{P}_1$ есть совокупность экстремальных точек множества $\mathfrak{P}$ (теорема 2). Основной результат работы состоит в том, что при естественных ограничениях всякий элемент из $\mathfrak{P}$ представим в виде (обобщенной) выпуклой комбинации элементов из $\mathfrak{P}_1$. Именно, если при $A \in \mathfrak{A}_1$ из $P(A) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{P}_1$ следует $P(A) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{P}$ и если Π — σ-алгебра подмножеств $\mathfrak{P}_1$ вида $\pi_A = \{P : P(A) = 1\}$, где $A \in \mathfrak{A}_1$, то для всякой $Q \in \mathfrak{P}$ существует и единственна такая вероятностная мера μ_Q на Π, что

$$Q(A) = \int_{\mathfrak{P}_1} P(A)\, d\mu_Q \text{ для всех } A \in \mathfrak{A}.$$

Более того, $\mu_Q(\pi_A) = Q(A)$ при всех $A \in \mathfrak{A}_1$.

В. В. Сазонов

9 В8. Теорема о вероятности произведения. Zoroa P. El teorema de la probabilidad producto. «Trab. estadist.», 1959, **10**, № 3, 197—208 (исп.; рез. англ.)

Для любого $t \in T$ задано вероятностное пространство $\{\Omega_t, A_t, P_t\}$ (A_t — σ-алгебра подмножеств из Ω_t, P_t — вероятностная мера на A_t). Ω_T — прямое произведение пространств Ω_t; $t \in T$. $\mathfrak{B}_T$ — алгебра, составленная из объединений (в конечном числе) цилиндрических множеств из Ω_T с конечномерными основаниями. Опреде-

лим функцию P_T на таких цилиндрических множествах, как произведение соответствующих P_t. Пусть также

$$\{B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_T;\ B_1 \cap B_2 = \emptyset\} \Rightarrow \{P_T(B_1 \cup B_2) = P_T(B_1) + P_T(B_2)\}.$$

Статья содержит еще одно (отличное от имеющегося в известной книге Лоэва (РЖМат, 1961, 5В21К)) доказательство теоремы: Функция P_T есть вероятностная мера на $\mathfrak{B}_T$ и ее продолжение на минимальную σ-алгебру, порожденную алгеброй $\mathfrak{B}_T$, определено однозначно. Р. Ф. Матвеев

9 В9. Замечания об определении продолжения вероятностной меры, заданной на подмножествах функционального пространства, с применением одной теоремы Дж. Л. Дуба. Small W. A. A note on defining an extension of a probability measure on subsets of function space, by applying one of J. L. Doob's theorems. «Proc. Iowa Acad. Sci.», 1958, **65**, 332—334 (англ.)

Содержание этой заметки сводится к следующему замечанию: Пусть W — множество всех действительных функций действительного переменного, F_0 — σ-алгебра, порожденная цилиндрами с борелевскими конечномерными основаниями, и F_2 — σ-алгебра борелевских множеств в W относительно тихоновской топологии. Иногда бывает нужно строить стандартное расширение меры P_0 на F_0 (Дуб, Вероятностные процессы, 1956, 68—69) с помощью, скажем, множества W' и желательно, чтобы $W' \subset F_2$. Если же это невыполняется, то можно часто обойтись стандартным расширением с помощью W' (если оно существует) продолжения P_2 меры P_0 на F_2. Для существования этого расширения необходимо и достаточно, чтобы $P_2^*(W') = 1$, где P_2^* — внешняя мера, построенная по мере P_2. В. В. Сазонов

9 В10. Оптимальное неравенство треугольника для статистических метрических пространств. Thorp Edward. Best possible triangle inequalities for statistical metric spaces. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1960, **11**, № 5, 734—740 (англ.)

Статистическим метрическим пространством называется множество S, каждой паре точек (p, q) которого поставлено в соответствие функция распределения $F_{pq}(x)$, характеризующая распределение расстояния между ними. Назовем t-функцией функцию $T(x, y)$ $(0 \leqslant x, y \leqslant 1)$, удовлетворяющую условиям: 1) $T(a, 1) = 0$, $T(0, 0) = 0$; 2) $T(c, d) \geqslant T(a, b)$, если $c \geqslant a$ и $d \geqslant b$; 3) $T(a, b) = T(b, a)$; 4) $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$. Пространством Менгера называется статистическое метрическое пространство с заданной t-функцией такой, что неравенство треугольника $T(F_{pq}(x), F_{qr}(x)) \leqslant F_{pr}(x, y)$ выполняется для всех p, q, r из S и всех неотрицательных x и y. Говорят, что t-функция $T_1(x, y)$ сильнее t-функции $T_2(x, y)$, если $T_1(x, y) \geqslant T_2(x, y)$ $(0 \leqslant x, y \leqslant 1)$. Ставятся следующие вопросы. Дано пространство Менгера. В каких случаях для него существует наиболее сильная t-функция? Дана t-функция. Существует ли статистическое метрическое пространство, для которого она будет наиболее сильной t-функцией? В работе второй вопрос решается полностью в положительном смысле. В связи с первым вопросом в работе доказывается несколько общих предложений о t-функциях и приводится пример пространства Менгера, в котором не существует наиболее сильной t-функции. И. И. Гихман

9 В11. Анализ свойств, присущих распределениям вероятностей. Halphen Etienne. L'analyse intrinsèque des distributions de probabilité. «Publs Inst. statist. Univ. Paris», 1957, **6**, № 2, 159 p. (франц.)

Исследуются свойства дискретных вероятностных пространств, инвариантные при перестановках их точек. Общий момент вероятности $\psi(t) = \sum p_i^{t+1}$ оказывается таким инвариантом, который определяет все остальные. Используется очевидный факт, что $\psi(t)$ для декартова произведения пространств представляет произведение соответствующих ψ. Изучаются производные

$$\psi^{(r)}(0) = \sum p_i (\log p_i)^r.$$

В частности, получаются свойства $\psi'(0)$, известные в теории информации Винера — Шеннона. L. I. Savage

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 9, 986.

9 В12. Геометрические вероятности и число π. Gridgeman N. T. Geometric probability and the number π. «Scripta Math.», 1960, **25**, № 3, 183—195 (англ.)

Описываются различные видоизменения известной задачи Бюффона о бросании иглы и связанного с нею метода экспериментального определения числа π. Анализируя результаты опытов, опубликованные различными исследователями, автор, построив доверительные интервалы, приходит к заключению, что совпадения с истинным значением числа π слишком хороши, чтобы они заслуживали доверия. Указывается, что это является, видимо, в одних случаях результатом порочной методики экспериментов, а в других — заведомой фальсификацией. Этот вывод, по мнению автора, косвенно подтверждается результатами моделирования подобных экспериментов на электронно-вычислительной машине. Подчеркивается необходимость различения теоретической возможности получения оценок числа π подобными методами и практической целесообразности проведения таких опытов. Последнее автор по ряду причин считает бессмысленным. Библ. 16 назв. А. И. Тейман

9 В13. Экстремальные функции трехмерного класса Фреше. Dall'Aglio Giorgio. Les fonctions extrêmes de la classe de Fréchet à 3 dimensions. «Publs Inst. statist. Univ. Paris», 1960, **9**, № 2, 175—188 (франц.)

Если $\Phi_k(x_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ — функции распределения, то n-мерным классом Фреше $\Gamma(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ называют множество функций распределения $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $\Phi_k(x_k)$ являются сечениями. Для $n = 2$ известно, что существуют функции $\Phi_m(x, y)$ и $\Phi_M(x, y)$ такие, что

$$\Phi_m(x, y) \leqslant \Phi(x, y) \leqslant \Phi_M(x, y)$$

для любой $\Phi \in \Gamma(\Phi_1, \Phi_2)$. Φ_m и Φ_M называются минимальной, соответственно максимальной, выписываются в явном виде через Φ_1, Φ_2 и являются функциями распределения из $\Gamma(\Phi_1, \Phi_2)$. Минимум для $\Phi \in \Gamma(\Phi_1 \Phi_2)$ интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}\int (y - x)^2 \, d\Phi(x, y)$ достигается на Φ_M, а максимум на Φ_m. При $n = 3$ также существуют максимальная и минимальная функции, но лишь первая всегда является функцией распределения. В статье выясняется «физический смысл» этих экстремальных функций, отличие трехмерного случая от двумерного, найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы минимальная функция была функцией распределения. Оказывается, в частности, что если эти условия выполнены, то носитель распределения, соответствующего минимальной функции, сосредоточен на некоторых трех полупрямых. Р. Ф. Матвеев

9 В14. Вырожденные неравенства Минковского и их применение в теории вероятностей. Fréchet Maurice. Les inégalités de Minkowski dégénérées et leurs applications en calcul des probabilités. «Ann. Inst. Henri Poincaré», 1956, **15**, № 1, 1—33 (франц.)

В гл. 1 статьи определено «глобальное» расстояние двух случайных величин X и Y

$$([X], [Y]) = \begin{cases} \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^{\alpha}} & \text{для } \alpha \geqslant 1, \\ \mathfrak{M}(X, Y)^{\alpha} & \text{для } \alpha \leqslant 1, \end{cases} \quad (1)$$

где (X, Y) — расстояние между значениями случайных величин в одном и том же опыте и $\mathfrak{M}$ обозначает математическое ожидание, и рассмотрены предельные случаи, когда $\alpha \to +\infty$ и $\alpha \to 0$. Кроме того, введены понятия типичного уклонения и типичного положения, центра и радиуса вариации и доминирующих положений. В гл. 2 показано, как сходимость по вероятности и сходимость, равномерная почти всюду, выражаются в терминах определенным образом выбранного расстояния. В гл. 3 указаны условия, при которых неравенство Минковского для расстояния, определенного по формуле (1), и для предельных случаев $\alpha \to +\infty$ и $\alpha \to 0$ превращается в равенство. Там же показано, какой вид принимают эти условия в некоторых простейших случаях. Е. В. Булинская

9 В15. Максимальный коэффициент корреляции (симметричный случай). Сарманов О. В. «Докл. АН СССР», 1958, **120**, № 4, 715—718

Пусть $F(x, y) = F(y, x)$ — симметричная плотность распределения случайных величин x и y таких, что

$$-\infty \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant \infty, \quad -\infty \leqslant a \leqslant y \leqslant b \leqslant \infty.$$

Положим $K(x, y) = \dfrac{F(x, y)}{\sqrt{p(x)\, p(y)}}$, где $p(x) = \int_a^b F(x, y)\, dy$, причем предполагается, что $K^2(x, y)$ — интегрируемая по обеим переменным функция. Спектр ядра $K(x, y)$ имеет вид $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, причем $|\lambda_1| > 1$. По определению, максимальный коэффициент корреляции $R^* = \dfrac{1}{\lambda_1}$.

Теорема 1. Для независимости x и y необходимо и достаточно, чтобы R^* обращался в нуль.

Теорема 2. Если корреляция прямолинейна, то обычный коэффициент корреляции совпадает с R^*. Дается способ вычисления R^* с помощью последовательных приближений. Определение и свойства R^* для дискретных случайных величин аналогичны.

В. Н. Тутубалин

9 В16. Максимальный коэффициент корреляции (несимметричный случай). Сарманов О. В. «Докл. АН СССР», 1958, **121**, № 1, 52—55

Пусть $F(x, y)$ — плотность распределения, определенная в конечном или бесконечном прямоугольнике

$$a \leqslant x \leqslant b,\ a_1 \leqslant y \leqslant b_1,\ p(x) = \int_{a_1}^{b_1} F(x, y)\, dy,$$

$$P(y) = \int_a^b F(x, y)\, dx,\ K(x, y) = F(x, y)/\sqrt{p(x)\, P(y)},$$

причем $K^2(x, y)$ интегрируем по x и y. Положим

$$F_1(x, y) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{F(x, t)\, F(y, t)}{P(t)}\, dt,$$

$$F_2(x, y) = \int_a^b \frac{F(t, x)\, F(t, y)}{p(t)}\, dt,$$

$$K_1(x, y) = \frac{F_1(x, y)}{\sqrt{p(x)\, p(y)}}, \qquad K_2(x, y) = \frac{F_2(x, y)}{\sqrt{P(x)\, P(y)}}.$$

Ядро $K(x, y)$ имеет спектр $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, ядра $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ имеют общий спектр $1 < \lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \leqslant \ldots$. По определению, $R^* = \dfrac{1}{\lambda_1}$ называется максимальным коэффициентом корреляции. Теоремы 1 и 2 работы автора (реф. 9В15) остаются верными и для несимметричного случая. В. Н. Тутубалин

9 В17. О статистической независимости и нулевой корреляции для нескольких измерений. Lancaster H. O. On statistical independence and zero correlation in several dimensions. «J. Austral. Math. Soc.», 1960, **1**, № 4, 492—496 (англ.)

Вводятся понятия так называемых обобщенных коэффициентов корреляции, которые по абсолютной величине могут не быть меньше 1. Доказывается следующая основная теорема 2: Для полной независимости случайных величин $\{x_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, необходимо и достаточно, чтобы обобщенные коэффициенты корреляции, построенные на полном множестве ортонормальных функций, равнялись нулю.

Примечание референтов. Автору, по-видимому, неизвестна работа референтов (РЖМат, 1960, 14168), где тот же результат получен с помощью максимальных коэффициентов множественной корреляции.

О. В. Сарманов, В. К. Захаров

9 В18. Структура двумерных распределений. Lancaster H. O. The structure of bivariate distributions. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 3, 719—736 (англ.)

Пусть $F(x, y)$ — двумерная функция распределения, $G(x) = F(x, \infty)$, $H(y) = F(\infty, y)$, существует

$$\Omega(x, y) = dF(x, y)/dG(x)dH(y)$$

и

$$\varphi^2 = \iint \Omega^2(x, y)\, dG(x)\, dH(y) < \infty.$$

Вводятся канонические функции $\xi^{(i)} = \xi^{(i)}(x)$ и $\eta^{(i)} = \eta^{(i)}(y)$, определяемые условиями:

$$\int \xi^{(i)}\, dG(x) = \int \eta^{(i)} dH(y) = 0,\ i = 1, 2, \ldots$$

$$\int (\xi^{(i)})^2\, dG(x) = \int (\eta^{(i)})^2\, dH(y) = 1,\ i = 1, 2, \ldots$$

$$\int \xi^{(i)} \xi^{(j)}\, dG(x) = \int \eta^{(i)} \eta^{(j)} dH(y) = 0$$

для $i \neq j$ и условиями $\xi^{(0)} = \eta^{(0)} = 1$, $\rho_i = \operatorname{cov}(\xi^{(i)} \eta^{(i)}) = \iint \xi^{(i)} \eta^{(i)} dF(x, y)$ принимает наибольшее значение при заданных канонических функциях с номерами $< i$. Оказывается, что $\iint \xi^{(i)} \eta^{(j)} dF(x, y) = 0$ при $i \neq j$. Имеет место равенство:

$$dF(x, y) = \left\{1 + \sum_1^{\infty} \rho_i \xi^{(i)} \eta^{(j)}\right\} dG(x)\, dH(y).$$

Если нам даны $G(x)$ и $H(y)$, то, выбирая $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ и ρ_i, мы можем по этой формуле образовать распределение $F(x, y)$, при условии, что ряд справа сходится и неотрицателен. Дается также критерий для проверки гипотезы о нормальности распределения $F(x, y)$.

В. Н. Тутубалин

9 В19. О задачах, связанных с квадратической регрессией. Laha R. G., Lukacs E. On a problem connected with quadratic regression. «Biometrika», 1960, **47**, № 3-4, 335—343 (англ.)

Пусть $M(Y \mid X)$ — условное математическое ожидание случайной величины Y при данном значении X. Говорят, что Y связано с X полиномиальной регрессией порядка k, если равенство

$$M(Y \mid X) = \beta_0 + \beta_1 X + \ldots + \beta_k X^k$$

имеет место почти всюду. При $k = 2$ эта регрессия называется квадратической. Доказывается, что выполнение равенства

$$M(Ye^{itX}) = \sum_{v=0}^{k} \beta_v M(X^v e^{itX})$$

для всех вещественных t является необходимым и достаточным условием того, что Y находилось с X в полиномиальной регрессии. Рассматривается выборка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ объема n из совокупности $F(x)$ с дисперсией σ^2. Исходя из характеристической функции (х. ф.) $f(t)$ распределения $F(x)$, составлено дифференциальное уравнение 2-го порядка, коэффициенты которого состоят из линейной комбинации коэффициентов статистик

$$\Lambda = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = n\overline{X}$$

и

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j + \sum_{j=1}^{n} b_j X_j.$$

Исследуя решение этого уравнения, авторы доказывают, что связь

$$M(Q \mid \Lambda) = \beta_0 + \beta_1 \Lambda + \beta_2 \Lambda^2$$

имеет место почти всюду тогда и только тогда, когда $F(x)$ — нормальное распределение и $\beta_0 = A\frac{\sigma^2}{n}$, где

$$A = A_1(n-1) - A_2 \neq 0,$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \quad A_2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij},$$

причем коэффициенты β_1 и β_2 определяются равенствами

$$\beta_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_j \text{ и } \beta_2 = \frac{A_1 + A_2}{n^2}.$$

Аналогичные теоремы даются и для случая, когда $f(t)$ есть х. ф. распределения Пуассона, х. ф. биномиального распределения, $F(x)$ — гамма-распределение с определенным видом х. ф. и когда х. ф. распределения дается формулой

$$f(t) = e^{i\mu t}[\operatorname{ch} at + i\lambda \operatorname{sh} at]^{-\rho},$$

где a, λ, μ, ρ — вещественные постоянные и $\rho > 0$, $a \neq 0$. Кроме того, доказано, что если в последнем $\mu = 0$, то $f(t)$ — безгранично делимая х. ф.

М. К. Камалов

9 В20. Два разложения для нормально распределенных четырех переменных. McFadden J. A. Two expansions for the quadrivariate normal integral. «Biometrika», 1960, 47, № 3-4, 325—333 (англ.)

Пусть X_1, X_2, X_3 и X_4 подчиняются четырехмерному нормальному распределению со средними нуль, а P_4 — значение вероятности того, что все эти четыре переменные принимают одновременно положительные значения. В статье даются два разложения для P_4, с помощью которых удобно вести вычисления. Первое разложение относится к случаю, когда X_1, X_2, X_3 и X_4 связаны стационарным Марковским процессом. Второе разложение дается для случая, когда корреляционная матрица имеет нулевые элементы, за исключением главной и непосредственно смежных с ней диагоналей. Показано, что оба эти разложения связаны между собой и один из них можно получить из другого путем простого преобразования. В приложениях к статье даются доказательства сходимости полученных рядов.

М. К. Камалов

9 В21. Двумерные экспоненциальные распределения. Gumbel E. J. Bivariate exponential distributions. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, 55, № 292, 698—707 (англ.)

Исследуются основные характеристики двумерных распределений, сосредоточенных в первом квадранте и имеющих плотности $1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y-\delta xy}$ или $(1-e^{-x})(1-e^{-y})[1 + \alpha e^{-x-y}]$, где $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

М. Г. Шур

9 В22. Одностороннее неравенство чебышевского типа. Marshall Albert W., Olkin Ingram. A one-sided inequality of the Chebyshev type. «Ann. Math. Statistics», 1960, 31, № 2, 488—491 (англ.)

Пусть случайные величины ξ_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ подчинены условиям: $E\xi_i = 0$, $E\xi_i^2 = \sigma^2$, $E\xi_i\xi_j = \sigma^2\rho$ $(i \neq j)$. Предположим также, что величина $t = (k-1)(1-\rho) - 1$ удовлетворяет неравенствам: $\sigma^2 t < 1$ и $k \geqslant \sigma^2(k-1)(1+t)$. Тогда вероятность события, состоящего в том, что хотя бы одно из ξ_i не меньше τ, не превосходит выражения

$$k\sigma^2\{\sqrt{r[1+\sigma^2-\sigma^2(k-1)(1-\rho)]} + (k-1)\sqrt{1-\rho}\}^2 \times \{k+\sigma^2 r\}^{-2},$$

где $r = 1 + (k-1)\rho$. Эта оценка, вообще говоря, не может быть улучшена.

М. Г. Шур

9 В23. Сложение случайных векторов. Haldane J. B. S. The addition of random vectors. «Sankhya Indian J. Statist.», 1960, 22, № 3-4, 213—220 (англ.)

Приведены формулы для вычисления первых пяти кумулянтов скалярного квадрата $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где ξ_i — одинаково распределенные независимые векторы, причем предполагается, что их распределения инвариантны относительно вращений вокруг начала координат.

М. Г. Шур

9 В24. Упрощенный метод подсчета кумулянтов произведений некоторых распределений, полученный из последовательности наблюдений. Krishna Iyer P. V. A simplified method for evaluating the product cumulants of some distributions arising from a sequence of observations. «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1958, 10, № 1-2, 33—40 (англ.)

Пусть имеется последовательность событий, в которой события A, B, C,... появляются с вероятностями соответственно p, q, r,... В этой последовательности рассматриваются комбинации последовательных событий вида AA, AB, AC; BA, BB, BC,... Обозначим X и Y количества появлений некоторых двух комбинаций в серии из n последовательных наблюдений. В статье дается метод, сводящий подсчет кумулянтов вида $K_{rs}(XY)$ к подсчету кумулянтов произведений случайных величин, характеризующих появление упомянутых комбинаций при $i=$м и $(i+1)=$м наблюдениях.

В. Н. Сачков

9 В25. О классах сверток для семейств с монотонным отношением правдоподобия. Ghurye S. G., Wallace David L. A convolutive class of monotone likelihood ratio families. «Ann. Math. Statistics», 1959, 30, № 4, 1158—1164 (англ.)

Пусть G — упорядоченная аддитивная группа, Θ — упорядоченное множество и μ — инвариантная σ-конечная мера на G. Рассмотрим семейство f — вещественную неотрицательную функцию на $G \times \Theta$ такую, что $f(x, \theta)$ измерима по x для каждого θ и

$$0 < \int_G f(x, \theta)\, d\mu(x) < \infty.$$

Свертка $f*g$ семейств f и g определяется соотношением

$$f*g(x, \theta) = \int_G f(x-u, \theta)\, g(u, \theta)\, d\mu(u).$$

Будем говорить, что семейство f обладает: свойством A, если $f(x+h, \theta)/f(x, \theta)$ не убывает по θ для всех x и $h > 0$; свойством B, если $f(x+h, \theta)/f(x, \theta)$ не возрастает по x для всех θ и $h > 0$; свойством C, если для всех x, x', y, $y' \in G$ таких, что $y \leqslant x < y'$ и $x + x' = y + y'$, и всех θ, $\theta' \in \Theta$ таких, что $\theta < \theta'$, выполняется соотношение

$$f(x,\theta)f(x',\theta') \geqslant f(y',\theta)f(y,\theta').$$

Доказывается ряд утверждений относительно сохранения свойств A, B, C при образовании свертки, например, теорема 1: Если f и g обладают свойством C, то и $f*g$ обладает этим свойством. Приводятся некоторые результаты для случая многомерных распределений. В качестве приложения рассматривается схема: $X_1, \ldots, X_n$ и Y — случайные величины такие, что при условии $Y = y$ $\{X_i\}$ взаимно независимы,

$$p_i(y) = P\{X_i = 1 \mid Y = y\} = 1 - P\{X_i = 0 \mid Y = y\}$$

и $p_i(y)$ не убывает по y; пусть $S = X_1 + \ldots + X_n$. Доказывается, что $E\{Y \mid S = r\}$ является неубывающей функцией r. Л. Я. Савельев

9 В26. Симметрия и асимметрия произведений случайных величин. Lévy Paul. Symétrie et dissymétrie des produits de variables aléatoires. «C. r. Acad. sci.», 1959, 248, № 13, 1920—1922 (франц.)

Обсуждаются различные вопросы, связанные с представлением случайных величин в виде произведения независимых сомножителей. Пусть $r = \xi\eta$, где ξ и η — независимые случайные величины. Функции распределения $F(x)$ каждой случайной величины ставится в соответствие функция

$$G(x) = F(x) + F(-x) - F(+0) - F(0).$$

Приводится несколько просто доказываемых соотношений, в частности,

$$G_r(x-0) = \int_0^\infty G_\xi\left(\frac{x}{u} - 0\right) dG_\eta(u) \text{ и } E_r(\alpha) = E_\xi(\alpha)\,E_\eta(\alpha),$$

где $E(\alpha)$ — преобразование Меллина — Стилтьеса функции G. Поскольку $G(x) \equiv 0$ для симметрично распределенных случайных величин и отлична от нуля в остальных случаях, то она может, по мнению автора, служить мерой асимметрии связанного с ней распределения F. Легко видеть, что симметрия распределения одного из сомножителей ξ, η влечет за собой симметрию распределения r. Автор отмечает, что обратное неверно, и приводит достаточное условие справедливости обратного утверждения, состоящее в том, что F_r должно быть чисто разрывным, и абсолютные значения точек разрыва образуют монотонное, вполне упорядоченное множество. Обсуждается вопрос о построении общей теории перемножения независимых случайных величин аналогичной хорошо известной теории суммирования независимых случайных величин.

В. М. Золотарев

9 В27. Оценка моментов линейных и квадратичных форм от независимых переменных. Whittle P. Bounds for the moments of linear and quadratic forms in independent variables, «Теория вероятностей и ее применения», 1960, 5, № 3, 331—335 (англ., рез. русск.)

Доказываются следующие две теоремы:

Теорема 1. Пусть случайные величины $z_1, \ldots, z_n$ независимые, каждая из которых принимает значения ± 1 с равной вероятностью 1/2. Тогда, какова бы ни была последовательность вещественных коэффициентов b_j,

$$M\left|\sum_j b_j z_j\right|^s \leqslant C(s,n)\left(\sum_j b_j^2\right)^{s/2} \quad (s \geqslant 2), \qquad (1)$$

где

$$C(s,n) = 2^{-n} n^{-s/2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n-k|^s \leqslant C(s) =$$

$$= \frac{2^{s/2}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right).$$

В (1) имеет место знак равенства, если $s = 2$ или все b_j по абсолютному значению равны между собою.

Теорема 2. Пусть $A = \sum_{jk} a_{jk} x_j x_k$ и $B = \sum_j b_j x_j$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ статистически независимы, их средние равны нулю и существуют $\gamma_j(s) = [M \mid x_j \mid^s]^{1/s}$. Тогда

$$M \mid B \mid^s \leqslant 2^s C(s)\left(\sum_j b_j^2 \gamma_j^2(s)\right)^{s/2},$$

$$M \mid A - M(A) \mid^s \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2s} C(s)\,[C(2s)]^{1/2}\left(\sum_{j,k} a_{jk}^2 \gamma_j^2(2s)\,\gamma_k^2(2s)\right)^{s/2}$$

при условии, что $s \geqslant 2$. Если все x_j имеют симметрические распределения, то член в правой части может быть уменьшен в 2^s раз. М. К. Камалов

9 В28. Новые результаты о независимых статистиках (Тезисы). Зингер А. А. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 103—105

9 В29. Характеризация нормального распределения. Lancaster H. O. The characterisation of the normal distribution. «J. Austral. Math. Soc.», 1960, 1, № 3, 368—383 (англ.)

Доказывается ряд лемм о существовании моментов всех порядков случайной величины и случайного вектора, компоненты которого имеют независимое распределение. Основываясь на этих леммах и с помощью кумулянтов распределения доказываются ранее известные теоремы, утверждающие, что независимость двух линейных форм является необходимым и достаточным условием нормальной распределенности случайных величин, из которых составлены эти формы. Подобные теоремы доказываются относительно системы линейных и квадратичных форм и относительно системы двух квадратичных форм. Даются новые доказательства теоремы Джейри (Geary), Кохрана (Cochran) и Крейга (Craig), при этом условие существования моментов второго порядка в теореме Джейри отбрасывается. М. К. Камалов

9 В30. Устойчивые законы распределения и преобразования Стилтьеса и Ле Роя. Wintner Aurel. Stable distributions and the transforms of Stieltjes and Le Roy. «Boll. Unione mat. ital.», 1958, 13, № 1, 24—33 (англ.; рез. итал.)

Приводятся и обсуждаются различные взаимозависимости функций Миттаг-Леффлера, устойчивых законов распределения и некоторых элементарных функций, устанавливаемые между ними посредством преобразований Лапласа, Стилтьеса и Ле Роя. Работа носит иллюстративный характер. В. М. Золотарев

9 В31. Об одновершинности устойчивых законов. Ибрагимов И. А., Чернин К. Е. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, 4, № 4, 453—456 (рез. англ.)

Доказывается, что все устойчивые законы распределения одновершинны. Н. В. Скороход

9 В32. Односторонний аналог неравенства Колмогорова. Marshall Albert W. A one-sided analog of Kolmogorov's inequality. «Ann. Math. Statistics», 1960, 31, № 2, 483—487 (англ.)

Для случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, у которых $E(X_1) = 0$, $E(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) = 0$ с вероятностью 1 $(i = 2, \ldots, n)$, $E(X_i^2) = \sigma_i^2 < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ в данной статье доказано таким же способом, как неравенство Колмогорова, следующее неравенство: для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_i) \geqslant \varepsilon\} \leqslant s_n/(\varepsilon^2 + s_n),$$

где $s = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ и приведен пример, показывающий, что может достигаться равенство. Далее это неравенство распространено на случай мартингала с непрерывным параметром и указаны условия, при которых достигается равенство. Е. В. Булинская

9 В33. О быстроте сходимости к нормальному закону в случае бесконечных дисперсий. Студнев Ю. П.

«Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-т. Сер. физ.-матем-н.», 1960, № 3, 70—71

Автор без доказательства приводит оценку для

$$\sup_x \left| F_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right|,$$

где $F_n(x)$ — функция распределения нормированной подходящим образом суммы S_n одинаково распределенных величин с бесконечными дисперсиями, но принадлежащих области притяжения нормального закона (см. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., 1949, § 35). Формулировка теоремы, по-видимому, искажена опечатками. Ю. В. Прохоров

9 В34. О приближении функции распределения суммы независимых случайных величин неограниченно делимыми сопровождающими законами. Студнев Ю. П. «Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-т. Сер. физ.-матем. н.», 1960, № 3, 68—69

Положим $\rho(F_1, F_2) = \sup_x |F_1(x) - F_2(x)|$. Пусть $F(x)$ — функция распределения, удовлетворяющая условию $\int |x|^\alpha dF < \infty$, $\alpha > 0$, и F_n — n-кратная свертка $F*F*\ldots$ Для $\rho_n = \rho(F_n, G)$, где G — класс всех неограниченно-делимых функций распределения, имеет место оценка $\rho_n = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$. Более того, если F — нерешетчатое распределение, то $\rho_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, а если оно удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} \left| \int e^{itx} dF \right| < 1, \text{ то } \rho_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Доказательства опущены. Ю. В. Прохоров

9 В35. К вопросу о приближении распределений сумм неограниченно-делимыми законами. Студнев Ю. П. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, 5, № 4, 465—469 (рез. англ.)

Пусть $F(x)$ — функция распределения (ф. р.) с характеристической функцией (х. ф.) $f(t)$. Положим

$$F_n(x) = \underbrace{F*F*\ldots*F}_{n \text{ раз}}(x),$$

обозначим через $\mathfrak{G}$ множество всех неограниченно-делимых законов и пусть

$$\rho(F, \mathfrak{G}) = \inf_{G\in\mathfrak{G}} \sup_x |F(x) - G(x)|.$$

В заметке приводятся верхние оценки расстояния $\rho(F_n; \mathfrak{G})$ (зависящие от свойств функции F). Вот одна из подобных оценок:

Теорема 1. Если $\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |f(t)| < 1$ и распределение $F(x)$ имеет конечную дисперсию, то $\rho(F_n; \mathfrak{G}) = O(n^{-1})$. Основной метод получения этих оценок — оценка расстояния $\rho(F_n; \Psi_n) = \sup_x |F_n(x) - \Psi_n(x)|$, где $\Psi_n(x)$ — ф. р. сопровождающего неограниченно-делимого закона с х. ф. $\exp\{n(f(t) - 1)\}$. Очевидно,

$$\rho(F_n; \Psi_n) \geqslant \rho(F_n; \mathfrak{G}).$$

И. А. Ибрагимов

9 В36. Предельная теорема для плотностей. Rao R. Ranga, Varadarajan V. S. A limit theorem for densities. «Sankhya Indian J. Statist.», 1960, 22, № 3-4, 261—266 (англ.)

Пусть ξ_n — независимые одинаково распределенные величины, F_n — функция распределения нормированной суммы $\eta_n = (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/\sqrt{n}$, p_n — плотность абсолютно непрерывной компоненты F_n; Φ — (0, 1)-нормальная функция распределения. $\varphi = \Phi'$. Доказано, что для сходимости:

$$p_n(x) \to \varphi(x) \tag{1}$$

почти всюду необходимы и достаточны условия: 1) $F_n \Rightarrow \Phi$, 2) при некотором n_0 F_{n_0} не сингулярна. Ранее референтом (Докл. АН СССР, 1952, 83, № 6, 797—800) было показано, что эти же условия необходимы и достаточны для сходимости в среднем:

$$\int |p_n - \varphi| dx \to 0. \tag{2}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае (1) и (2) равносильны. Аналогичные теоремы формулируются для устойчивых предельных распределений, для многомерного случая и для условных распределений. Если, в дополнение к 1) и 2) 3) $M|\xi_n|^3 < \infty$, то существуют константы C_1, C_2 и λ, $0 < \lambda < 1$, такие, что лебегова мера множества тех x, для которых $|p_n(x) - \varphi(x)| \geqslant C_1 n^{-1/2}$, не превосходит $C_2 \lambda^n$. Ю. В. Прохоров

9 В37. Некоторые новые исследования по теории вероятностей больших уклонений. Richter Wolfgang. Einige neuere Untersuchungen aus der Theorie der Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, 40, Sonderh., 95—96 (нем.)

После краткого обзора проблематики предельных теорем для больших уклонений сумм случайных величин формулируется следующий новый результат. Пусть C — класс распределений с характеристической функцией $\varphi(t)$, которая может быть аналитически продолжена с положительной полуоси на полосу, содержащую положительную полуось и точку $t = 0$. Пусть

$$M(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_k \frac{z^k}{k!}$$

— соответствующее аналитическое продолжение, C_2^l — подкласс класса C, образованный распределениями с конечным моментом порядка l и бесконечным моментом порядка $l + 1$. Рассматривается последозательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с распределением, принадлежащим классу C_2^l; предполагается, что для некоторого $n = n_0$ существует и ограничена плотность распределения $g_n(x)$ суммы $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Пусть $\operatorname{Im}\tilde{\mu}_{l+1} \neq 0$. Если $|x|/n \to \infty$ при $n \to \infty$, то при $n \to \infty$

$$g_n(x) = \frac{n \operatorname{Im} \tilde{\mu}_{l+1}}{\pi |x - n \operatorname{Re}\tilde{\mu}_1|^{l+2}} \times \left[1 + O\left(\frac{1}{|x - n \operatorname{Re}\tilde{\mu}_1|}\right)\right].$$

В. В. Петров

9 В38. О центральной предельной теореме для эргодических эндоморфизмов компактных коммутативных групп. Леонов В. П. «Докл. АН СССР», 1960, 135, № 2, 258—261

Пусть G — компактная коммутативная группа с инвариантной мерой μ, а T — эргодический эндоморфизм группы G на G. Если принять G за пространство элементарных событий, то для любой $g \in L^2(G)$ функция $\xi(t, x) = g(T^t x)$ образует стационарный случайный процесс с дискретным временем. В работе изучаются условия, при которых к указанному процессу применима центральная предельная теорема, т. е. когда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left\{x:\ \frac{1}{\sqrt{p}}\times\left(\sum_{t=0}^{p-1}g(T^t x)-m_g p\right)<y\right\}=\Phi_\sigma(y),$$

где $m_g=\int_G g(x)\,d\mu$, а $\Phi_\sigma(y)$ есть нормальный закон с параметрами $(0,\sigma)$. Пусть $g(x)$ разлагается в ряд Фурье по характерам: $g(x)=\sum_n c_n\chi_n(x)$. Вводится оператор A, отображающий множество индексов характеров в себя и определяемый формулой $\chi_{A(n)}(x)=\chi_n(Tx)$. Доказана следующая теорема: Пусть $g(x)\in L^2(G)$ вещественна и $\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{n\neq 0}|c_n|\cdot|c_{A(n)}|<\infty$; тогда $g(x)$ подчиняется центральной предельной теореме, при этом

$$\sigma^2=\sum_{n\neq 0}|c_n|^2+2\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{n\neq 0}c_n\overline{c}_{A(n)}.$$

В качестве следствия получается результат, что если ряд из коэффициентов Фурье сходится абсолютно, то функция подчиняется центральной предельной теореме при любом эргодическом эндоморфизме. Для случая k-мерного тора сформулировано достаточное условие подчинения $g(x)$ центральной предельной теореме в терминах скорости убывания коэффициентов Фурье функции $g(x)$. Б. М. Клосс

9 В39. О предельных теоремах для сверток функций распределения. I. Bergström Harald. On the limit theorems for convolutions of distribution functions. I. «J. reine und angew. Math.», 1957, 198, № 3-4, 121—142 (англ.)

Квазифункциями распределения автор называет функции $f(x)$ конечные и неубывающие для $x\neq 0$. Для них определяется преобразование Вейерштрасса

$$f(\sigma,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi\left(\frac{x-t}{\sigma}\right)df(t),$$

где $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения.

$$N_\sigma[f(x)]=\sup_x|f(\sigma,x)|$$

называется нормой Вейерштрасса. При помощи этой нормы в реферируемой части статьи изучается сходимость функций распределения и квазифункций распределения. Во второй части автор предполагает доказать предельные теоремы для сверток функций распределения. Е. В. Булинская

9 В40. О предельном распределении величины первого перескока. Коваленко И. Н. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, 5, № 4, 469—472 (рез. англ.)

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $0<M\xi_k<\infty$, и $s_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. Величина первого перескока через уровень t есть $\gamma_t=s_{\nu(t)+1}-t$, где $\nu(t)$ определяется из соотношения

$$\max_{1\leqslant k\leqslant\nu(t)}s_k\leqslant t<s_{\nu(t)+1}.$$

Пусть $K(\lambda)$ есть характеристическая функция величины ξ_k. Оказывается, что если $1-K(\lambda)\neq 0$ при $0<\lambda<\infty$, то предельное распределение величины γ_t при $t\to\infty$ существует, и характеристическая функция $L(\lambda)$ этого предельного распределения может быть найдена методом факторизации. А именно, существует такая факторизация функции

$$\frac{1-K(\lambda)}{i\lambda}=G_+(\lambda)\,G_-(\lambda),$$

при которой $G_+(\lambda)=L(\lambda)$. Отмечается, что если распределение величины ξ_k имеет абсолютно непрерывную компоненту, или величина ξ_k с положительными вероятностями может принимать два значения x_1 и x_2, отношение которых иррационально, то факторизация единственна, и $L(\lambda)=G_+(\lambda)/G_+(0)$. Рассматривается также случай решетчатых распределений. Задача о нахождении предельных распределений γ_t исследовалась для случаев, когда ξ_k принимают только положительные значения и когда ξ_k решетчатые и ограниченные. В. А. Волконский

9 В41. К теории крайних значений. Geffroy Jean. Contribution à la théorie des valeurs extrêmes. «Publs Inst. statist. Univ. Paris», 1958, 7, № 3-4, 37—121 (франц.)

$x_1,\ldots,x_n$ — последовательность действительных, одинаково распределенных, независимых случайных величин; $x_1(\omega),\ldots,x_n(\omega)$ — ее реализация. Перенумеровав эти числа в порядке возрастания, получим ряд

$$x_1^*(\omega)\leqslant\ldots\leqslant x_n^*(\omega).$$

Изучаются свойства случайных величин

$$Y_n^\alpha\equiv x_{n-\alpha+1}^*(\omega)$$

при фиксированном α и $n\to\infty$. В гл. 1 введены понятия мажорирования по вероятности и с вероятностью 1: последовательность чисел $\{a_n\}$ мажорирует последовательность случайных величин $\{z_n\}$, если

$$P\{z_n<a_n\}\to 1;\ n\to\infty$$

(соответственно $P\{\bigcap_{n}^{\infty}[z_n<a_n]\}\to 1$). Введено также понятие почти полного мажорирования: если имеется последовательность $\{z_n\}$, то обозначим через $\{z_n'\}$ последовательность независимых случайных величин таких, что z_n и z_n' одинаково распределены; $\{a_n\}$ мажорирует почти полностью $\{z_n\}$, если $\{a_n\}$ мажорирует $\{z_n'\}$ с вероятностью 1. Выявлены связи между этими тремя понятиями. Найдены различные необходимые и достаточные условия для того, что данная последовательность $\{a_n\}$ мажорирует $\{Y_n^\alpha\}$ по вероятности, почти полностью. Разобран ряд интересных частных случаев. Аналогично вводятся понятия минорирующих последовательностей и находятся условия минорирования. В гл. 2 даны необходимые и достаточные условия устойчивости и относительной устойчивости по вероятности последовательности $\{Y_n^\alpha\}$ (последовательность $\{z_n\}$ называется устойчивой (относительно устойчивой) по вероятности, если $z_n-a_n\to 0$, $n\to\infty$ ($z_n/a_n\to 1$, $n\to\infty$) по вероятности для некоторой числовой последовательности $\{a_n\}$). Доказано, что $\{Y_n^\alpha\}$ и $\{Y_n^\beta\}$ для любых α,β одновременно устойчивы или неустойчивы (то же для относительной устойчивости), причем в первом случае

$$Y_n^\alpha-Y_n^\beta\to 0,\ n\to\infty$$

(соответственно $Y_n^\alpha/Y_n^\beta \to 1$, $n \to \infty$) по вероятности. В гл. 3 формулируются необходимые и достаточные условия почти полной устойчивости (и относительной почти полной устойчивости) для $\{Y_n^\alpha\}$ ($\{z_n\}$ называется почти полностью устойчивой, если $z_n' - a_n \to 0$ с вероятностью 1 для некоторой числовой последовательности $\{a_n\}$, z_n и z_n' связаны так же, как и при определении почти полного мажорирования). Указанные выше результаты для устойчивости по вероятности справедливы и для почти полной устойчивости. Гл. 4 посвящена устойчивости с вероятностью 1. Здесь найдены достаточные условия устойчивости $\{Y_n^\alpha\}$ и указан случай, когда они становятся необходимыми. В этом случае снова $Y_n^\alpha - Y_n^\beta \to 0$, $n \to \infty$ с вероятностью 1. Автор указывает на связь некоторых своих результатов с соответствующими результатами Гнеденко.

Р. Ф. Матвеев

9 В42. Предельные теоремы для больших уклонений в теории однородных цепей Маркова. Нагаев С. В. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 52—54

9 В43. Экспоненциальная граница для функций от марковских цепей. Katz Melvin, Jr, Thomasian A. J. An exponential bound for functions of a Markov chain. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 2, 470—474 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — эргодическая цепь Маркова с конечным числом состояний r, матрицей вероятностей перехода $P = (p_{ij})$, произвольным начальным распределением и стационарным распределением $p_1, p_2, \ldots, p_r$ (так что $P\{X_n = j\} \to p_j$). Пусть f — некоторая действительная функция, определенная на состояниях марковской цепи,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(X_k), \quad \mu = \sum_{k=1}^{r} p_k f(k)$$

и

$$M = \max_k f(k) - \min_j f(j).$$

Тогда имеет место теорема: Если m — некоторое целое положительное число и $\varepsilon > 0$, то

$$P\{|n^{-1}S_n - \mu| \geqslant \varepsilon \text{ для } n \geqslant m\} \leqslant 2Ae^{-B\varepsilon^2 m},$$

$$P\{S_n \geqslant n(\mu + \varepsilon) \quad \text{для } n \geqslant m\} \leqslant Ae^{-B\varepsilon^2 m},$$

$$P\{S_n \leqslant n(\mu - \varepsilon) \quad \text{для } n \geqslant m\} \leqslant Ae^{-B\varepsilon^2 m},$$

где

$$A = \frac{8r}{p^r} \cdot \frac{1}{1 - e^{-B\varepsilon^2}}, \quad B = \frac{p^{3r}}{2^8 M^2 r^2},$$

а p — наименьшая из положительных вероятностей перехода p_{ij} (среди вероятностей возможны и нули). Основная идея доказательства состоит в использовании метода Дёблина, с помощью которого сумма $\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$ разбивается на подсуммы, содержащие случайное число слагаемых, причем числа слагаемых распределены одинаково и независимо. В заключение приводится пример, из которого следует, что теорема не сохраняет силы в случае цепи Маркова со счетным числом состояний.

В. М. Волков

9 В44. Центральная предельная теорема для случайных процессов с независимыми приращениями. Fisz M. A central limit theorem for stochastic processes with independent increments. Studia math., 1959, **18**, № 2, 223—227 (англ.)

Пусть $\{Y_k(t),\ 0 \leqslant t \leqslant a\}$ — последовательность одинаково распределенных независимых процессов с независимыми приращениями, $MY_k(t) = 0$, $DY_k(a) < \infty$. Тогда распределения процессов $(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n) \cdot n^{-1/2}$ сходятся слабо к распределению гауссовского процесса $Y(t)$ с независимыми приращениями, $MY(t) = 0$, $DY(t) = DY_k(t)$. Это утверждение выводится из результатов А. В. Скорохода (РЖМат, 1960, 14103).

Ю. В. Прохоров

9 В45. Применение теории границ к суммам независимых случайных величин. Doob J. L., Snell J. L., Williamson R. E. Application of boundary theory to sums of independent random variables. «Contribs Probability and Statist». Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 182—197 (англ.)

Исследуется природа «границы» цепей Маркова, порождаемых суммами независимых случайных величин. Пусть R — подмножество целых чисел; $p = (p(ij))$ — стохастическая матрица $(i, j \in R)$; функция u, определенная на R, представима как вектор-столбец и называется суперрегулярной на R, если: 1) $-\infty < u \leqslant \infty$ на R, 2) для любого целого $n > 0$ функция $p^n u$ конечна на R, $pu \leqslant u$. u называется регулярной на R, если u и $-u$ суперрегулярны. Если u — положительная, регулярная на R функция такая, что любая другая положительная регулярная функция $v \leqslant u$ пропорциональна u, то u называется минимальной. Далее, в цепи Маркова с матрицей φ. Выделяется множество s достижимых из 0 состояний. Пусть $u_j(i)$ — вероятность из i когда-либо попасть в j и $k(i, j) = u_j(i)/u_j(0)$ $(i, j \in s)$. В s вводится метрика с помощью расстояния $d(\nu_1, \nu_2) = \sum_l |k(i, \nu_1) - k(i, \nu_2)| 2^{-i} \nu_i(1)$. ν_1 и ν_2 принадлежат одному устойчивому классу, если $d(\nu_1, \nu_2) = 0$. s можно пополнить до компактного метрического пространства. Множество s', состоящее из точек, соответствующих устойчивым классам (вырожденные точки), и предельных точек пополнения, называется границей s. На множестве s' функция $k(i, \xi)$ будет также определена, если для невырожденных точек ξ положить $k(i, \xi) = \lim_{j \to \xi} k(i, j)$. С помощью функции $k(i, \xi)$ устанавливается соответствие между точками границы и положительными конечными суперрегулярными функциями. Точка границы называется минимальной, если $k(i, \xi)$ — минимальная регулярная функция. Вырожденные граничные точки минимальны. Если $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — марковский процесс с переходной матрицей p, определенный в s, то $\lim_{n \to \infty} k(i, X_n)$ существует с вероятностью 1. Введенные понятия изучаются и иллюстрируются на марковском процессе, порожденном случайным блужданием. Пусть Y — случайная величина со значениями в целочисленных точках N-мерного пространства: $P(Y = j) = p(j)$ (j — вектор); $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, где $P(Y_k = j) = P(Y = j) = p(j)$, так, что $p(i, j) = p(j - i)$. Рассматривается случай, когда все состояния невозвратны (только он и является содержательным с точки зрения граничной теории). Доказано, что для случайного блуждания в N-мерном пространстве: 1) $u = 1$ является минимальной функцией; 2) положительная функция u, $u(0) = 1$, является минимальной тогда и только тогда, когда

$$\sum u(i) p(i) = 1, \quad u(i + j) = u(i) u(j) \quad (i, j \in fs).$$

В одномерном случае с вероятностью 1 $\lim_{n \to \infty} k(i, X_n) = 1$. Если существует положительное решение $s_0 \neq 1$ уравнения $Ms^Y = 1$, то имеется лишь две минимальных

граничных точки, а любая регулярная функция имеет вид $u(i) = a + (1-a)s_0^i$, $0 \leqslant a \leqslant 1$. При $MY > 0$ $\lim_{j\to\infty} k(i,j) = 1$ и $\lim_{j\to-\infty} k(i,j) = s_0$, если $s_0 \neq 1$ существует. Описывается приближение к точкам границы в двумерном случае. Проводится аналогия с классической теорией гармонических и супергармонических функций. А. А. Боровков

9 В46. Стохастические дифференциальные уравнения. Zítek František. Équations différentielles stochastiques. «Чехосл. матем. ж.», 1958, 8, № 3, 465—472

Изучаются случайные функции с независимыми приращениями и их производные. Вводятся в рассмотрение три типа дифференциальных уравнений, определяющих производную от искомой случайной функции: а) уравнения, когда прямо определены законы распределения производной, б) уравнения, когда определены законы распределения конечных разностей $\Delta_h X(t) = X(t+h) - X(t)$ решения, в) уравнения, когда законы распределения указанных разностей определены с некоторой точностью. Исследуются вопросы существования решения уравнений, в особенности уравнений третьего типа. С. Х. Туманян

9 В47. О центрировании безгранично делимых процессов. Pyke Ronald. On centering infinitely divisible processes. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 3, 797—800 (англ.)

Автор называет безгранично делимым процессом случайный процесс $\{x_t, t \in T\}$, имеющий независимые и стационарные приращения. Отмечается ряд простых свойств этих процессов. В частности, показано, что для безгранично делимого процесса $\{X_t, t \geqslant 0\}$ существует такая центрирующая функция $c(t)$, что центрированный процесс $\{x(t) - c(t), t \geqslant 0\}$ тоже безгранично делим. И. А. Ибрагимов

9 В48. О некоторых матрицах, описывающих изменение состояния. Boccia Serafino. Su alcune matrici di cambiamento di stato, «Ricerca», 1960, **11**, gen.-apr., 20—24 (итал.)

Рассмотрены элементарные свойства стохастических матриц. М. Г. Шур

9 В49. Объединение вероятностных матриц. Burke C., Rosenblatt M. Consolidation of probability matrices. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 7—8 (англ.; рез. франц.)

Пусть $\{X(t), t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — цепь Маркова с m состояниями, с положительной матрицей вероятностей перехода $P = (p_{ij})$, с вектором начальных вероятностей $p = (p_i)$, левоинвариантным относительно матрицы P: $pP = p$. Пусть f — некоторая функция, определенная на состояниях исходной цепи Маркова и принимающая значения $s_1, s_2, \ldots, s_r$, $r \leqslant m$; а $Y(t) = f[X(t)]$ — новый случайный процесс. Авторы находят следующие условия, при выполнении которых матрица Q вероятностей перехода для $Y(t)$ удовлетворяет уравнению Чэпмена — Колмогорова: 1) $PBAPB = P^2B$; 2) $APBAP = AP^2$. Отсюда получается условие марковости $Y(t)$ $BAPB = PB$. В этих формулах $B = (b_{ij})$,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } f(i) = s_j, \\ 0, & \text{если } f(i) \neq s_j, \end{cases}$$

$A = (B'DB)^{-1}B'D$; D — диагональная матрица с диагональными элементами $p_1, p_2, \ldots, p_m$. В. М. Волков

9 В50. Решение некоторых задач из теории дискретного случайного блуждания. Henze E. Lösung einiger Probleme aus der Theorie der diskreten Irrfahrt. «Z. angew. Math. und Mech.», 1959, **39**, № 9-11, 371—373 (нем.)

Рассматривается случайное блуждание на плоскости по квадратной решетке: за единицу времени частица с вероятностями p_1, p_2, q_1, q_2 $(p_1+p_2+q_1+q_2=1)$, не зависящими от времени и координат, переходит в один из соседних узлов решетки. Дается обзор постановок задач и известных результатов. Сообщаются новые результаты, полученные автором, в частности, необходимость условия $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$ для возвратности всех состояний на неограниченной плоскости, а также результаты, относящиеся к блужданию на полуплоскости (с поглощением на границе) и на плоскости с разрезом (поглощение на отрицательной полуоси). Кратко указаны методы получения результатов. Д. М. Чибисов

9 В51. Проблема случайного блуждания. Gillis J. A random walk problem. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1960, **56**, № 4, 390—392 (англ.)

Рассматривается случайное блуждание на двумерной решетке. Частица на каждом шагу переходит только в соседнюю точку, вправо к направлению предыдущего шага с вероятностью $\frac{1}{2}(1+\alpha)$, влево — с вероятностью $\frac{1}{2}(1-\alpha)$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Блуждание начинается в точке 0, а все четыре направления для первого шага — равновероятны. Для вероятности возвращения в начальную точку после r шагов A_r получены точная и асимптотическая формулы

$$A_{4n} = \alpha^{2n}(1-\alpha^2)^{-1}(P_n^2(\beta) - \alpha^2 P_{n-1}^2(\beta)),$$

$$A_{4n} \sim \frac{1}{\pi n}\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}, \quad |\alpha| \neq 1,$$

$$A_r = 0, \quad r \not\equiv 0 \pmod 4,$$

где $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{-1})$, P_n — n-й полином Лежандра. Используется метод производящих функций.

Э. И. Вилкас

9 В52. Почти периодические дискретные по времени процессы Маркова с конечным числом состояний. Jacobs K., Fastperiodische diskrete Markoffsche Prozesse von endlicher Dimension. «Abhandl. Math. Seminar. Univ. Hamburg», 1957, **21**, № 3-4, 194—246 (нем.)

Рассматривается цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода на k-м шаге $P_k = \|p_{ij}(k)\|$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Цепь называется почти периодической, если при фиксированных i и j последовательность $p_{ij}(k)$ почти периодична. Автор доказывает, что в случае почти периодической цепи последовательность матриц $T_n = \prod_1^n P_k$ почти периодична в некотором асимптотическом смысле. М. Г. Шур

9 В53. К эргодической теореме для неоднородных цепей Маркова. Сарымсаков Т. А., Мустафин Х. А. «Тр. Среднеаз. ун-та», 1957, вып. 74, 38 стр.

Изучаются эргодические свойства простой неоднородной цепи Маркова с конечным числом состояний s. Во множестве $G^{(s)}$ всех стохастических матриц порядка s выделяется класс $G_1^{(s)}$ примитивных матриц, содержащий подкласс $G_2^{(s)}$ матриц, обладающих тем свойством, что произведение их на любую примитивную матрицу дает снова примитивную матрицу. Символически это можно обозначить так: $G_2^{(s)} \cdot G_1^{(s)} \subset G_1^{(s)}$. В $G_2^{(s)}$ содержится множество $M^{(s)}$ «марковских» матриц (матриц, у которых хотя бы один столбец целиком положителен). Но $M^{(s)} \neq G_2^{(s)}$. Структура упомянутых классов матриц изучается с помощью гомоморфизма $G^{(s)}$ на $\overline{G^{(s)}}$ — множество булевых стохастических матриц порядка s. Этот гомоморфизм задается соотнесением матрице $P = (p_{ij})$ матрицы $A = (a_{ij})$ по правилу:

$$\text{если} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } p_{ij} > 0, \\ 0 \text{ при } p_{ij} = 0. \end{cases}$$

(причем считается, что $1+1=1$, что дает $\sum_j a_{ij} = 1$).

Этот гомоморфизм распространяется и на выделенные классы матриц, так что

$$G_1^{(s)} \to \overline{G_1^{(s)}},\ G_2^{(s)} \to \overline{G_2^{(s)}},\ M^{(s)} \to \overline{M^{(s)}}.$$

В классе $\overline{G_2^{(s)}}$ имеет место следующая лемма: Если $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \overline{G_2^{(s)}}$ и $k > \nu$, где ν — число элементов множества $\overline{G_2^{(s)}} - \overline{M^{(s)}}$, то произведение этих матриц принадлежит $\overline{M^{(s)}}$. В классе же $G_1^{(s)}$ это не так. С помощью этой леммы формулируется эргодическая теорема: Необходимое и достаточное условие эргодичности неоднородной цепи Маркова состоит в том, чтобы из последовательности матриц вероятностей перехода, соответствующей данной цепи Маркова, можно было путем перемножения соседних матриц получить последовательность марковских матриц. Бо́льшая часть работы посвящена исследованию структуры класса $G_2^{(s)}$, т. е. описанию множества булевых матриц, входящих в $\overline{G_2^{(s)}}$. Здесь доказано, что матрицы, полученные одна из другой путем одинаковой перестановки строк и столбцов, одновременно входят или не входят в $\overline{G_2^{(s)}}$ (§ 3). Показано существование немарковских матриц, входящих в $\overline{G_2^{(s)}}$. В частности, стохастическая булева матрица A порядка $s > 2$ с одним нулем в каждом столбце входит в $\overline{G_2^{(s)}}$ (§ 4). Построен класс стохастических T-матриц, не входящих в $\overline{G_2^{(s)}}$, и класс H-матриц, содержащий как матрицы, входящие в $\overline{G_2^{(s)}}$, так и матрицы, не входящие в $\overline{G_2^{(s)}}$ (§§ 5, 6). Наконец, получено достаточное условие для вхождения стохастической матрицы в класс $\overline{G_2^{(s)}}$, а именно: все стохастические матрицы порядка s, не входящие ни в класс $T^{(s)}$ ни в класс $H^{(s)}$, входят в $\overline{G_2^{(s)}}$ (§ 7). В. М. Волков

9 В54. Критерий возвратности или невозвратности вероятностного процесса. I. Lamperti John. Criteria for the recurrence or transience of stochastic process. I. «J. Math. Analysis and Applic.», 1960, **1**, № 3-4, 314—330 (англ.)

Изучается неприводимая однородная по времени цепь Маркова $\{X_n\}$ со счетным числом возможных состояний 0, 1, 2, ... Относительно $\{X_n\}$ делаются, кроме того, следующие предположения: 1) $P\{\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n = \infty\} = 1$; 2) $|X_{n+1} - X_n| \leqslant B$ для всех n (равномерная ограниченность скачков). Обозначим $\mu(x) = M\{X_{n+1} - X_n \mid x_n = x\}$; $v(x) = M\{[X_{n+1} - X_n]^2 \mid x_n = x\}$. Предполагается, что при всех x выполнено условие $v(x) \geqslant v_0 > 0$. Основной результат работы представляет следующая

Теорема 3. 1. Если при всех достаточно больших x выполнено условие $\mu(x) \leqslant \theta v(x)/2x$ для некоторого $\theta < 1$, то цепь X_n возвратна (т. е. существует $r < \infty$ такое, что $P\{\liminf_{n\to\infty} X_n \leqslant r\} = 1$). Если же при всех достаточно больших x и для некоторого $\theta > 1$ выполнено условие $\mu(x) \geqslant \theta v(x)/2x$, то цепь невозвратна (т. е. $P\{X_n \to \infty\} = 1$, $n \to \infty$)

При некоторых дальнейших предположениях автору удается освободиться от условия 2) и обобщить этот результат на случай процессов, не являющихся марковскими, а также показать, что в первом утверждении теоремы можно положить $\theta = 1$. Эти результаты применяются к исследованию многомерного марковского процесса. Разобран ряд интересных примеров.

Р. З. Хасьминский

9 В55. Невозвратные атомические марковские цепи со счетным числом состояний. Breiman Leo. Transient atomic Marcov chains with a denumerable number of states. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 1, 212—218 (англ.)

Невозвратная марковская цепь называется атомической, если вероятность $P\{x_n \in A$, б. м.$\}$ попасть в множество A бесконечно много раз равна нулю или единице независимо от начального распределения. Изучается структура множеств A, обладающих свойством

$$P\{x_n \in A, \text{ б. м.}\} = 0.$$

Положим $u_{ik} = M$ {числа попаданий в $k \mid x_0 = i$}.

Теорема. Если x_0, x_1 — атомическая цепь, то для каждой последовательности неотрицательных чисел $\{\alpha_k\}$ такой, что $\sum_K u_{ok}\alpha_k < \infty$ и каждого $\varepsilon > 0$ множество состояний $A_\alpha = \{i : \sum_K u_{ik}\alpha_k \geqslant \varepsilon\}$ обладает свойством $P\{x_n \in A_\alpha$, б. м.$\} = 0$. Обратно, всякое множество A такое, что $P\{x_n \in A$, б. м.$\} = 0$, есть подмножество некоторого множества вида A_α. Рассматривается случай, когда x_0, x_1 — последовательные моменты возвращения к равновесию в безобидной игре в орла и решку. Оказывается, в частности, что в этом случае структура множеств, обладающих свойством $P\{x_n \in A$, б. м.$\} = 0$, не допускает простого описания, т. е. не существует последовательности $\{\lambda_m, \lambda_m \geqslant 0\}$ такой, что равенство $P\{x_n \in A$, б. м.$\} = 0$ эквивалентно неравенству $\sum_{m\in A} \lambda_m < \infty$ для любого A. В. Н. Тутубалин

9 В56. О процессе рождения и гибели. Wang Tzu-kwen. On a birth and death process. «Sci. Rec.», 1959, **3**, № 8, 331—334 (англ.)

Пусть имеется счетный марковский процесс с множеством состояний $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и с матрицей плотностей перехода $Q = \| q_{ij} \|$, удовлетворяющей условию: $q_{ij} = 0$, если $|i - j| > 1$. С помощью элементов матрицы Q выражаются две величины: R — среднее время перехода из 0 в ∞, и S — среднее время перехода из ∞ в 0. Если задана матрица Q, то в случае $S < \infty$ и $R < \infty$ существует единственный марковский процесс, матрица переходных вероятностей которого $P(t)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова $P'(t) = P(t)Q$, $P(0) = I$ (РЖМат, 1959, 7195). Дается конструкция этого процесса. Доказательств нет. Б. А. Севастьянов

9 В57. Стохастические матрицы, индуцирующие одинаковые границы. Hennequin Paul-Louis. Matrices de probabilités définissant la même frontière. «C. r. Acad. sci.», 1961, **252**, № 2, 235—236 (франц.)

Рассматривается максимальная граница Феллера $B^*(P)$ (РЖМат, 1958, 7974), индуцированная бесконечной стохастической матрицей P. Пусть $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, $a_n \geqslant 0$, $\sum_0^\infty a_n = 1$, $a_0 < 1$, и пусть матрицы P и P_1 связаны соотношением $P_1 = f(P)$. Оказывается, что $B^*(P) = B^*(P_1)$ тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = 1$ имеет только один корень, равный по модулю единице. Случай, когда P отвечает однородному процессу рождения и гибели, исследован более подробно.

М. Г. Шур

9 В58. Потенциалы для счетных цепей Маркова. Kemeny John G., Snell J. Laurie. Potentials for de-

numerable Markov chains. «Bull. Amer. Math. Soc.», 1961, **67**, № 1, 120—122 (англ.)

Рассматривается однородная цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей P. Мера α называется суперрегулярной, если $\alpha P \leqslant \alpha$. Если функция f интегрируема по некоторой заданной суперрегулярной мере α и предел $g = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n P^k f$ существует, то функция g называется правым потенциалом функции f. Доказывается, что матрицы G и C с элементами

$$G_{ij} = \lim_{n\to\infty} [N_{ii}^{(n)} \alpha_j \alpha_i^{-1} - N_{ij}^{(n)}]$$

и

$$C_{ij} = \lim_{n\to\infty} [N_{jj}^{(n)} - N_{ij}^{(n)}]$$

(здесь $\alpha_i = \alpha(i)$ и $N_{ij}^{(n)}$ — среднее время, проведенное траекторией в состоянии j до момента времени n, при условии, что она вышла из i) существуют или нет одновременно. Цепи, для которых существуют эти матрицы, называются нормальными. Нормальны все положительные возвратные цепи и некоторые классы нулевых цепей. Функция f называется слабым зарядом, если как функция Gf, так и мера μG, где $\mu(i) = f_i \alpha_i$, ограничены. В случае нормальной цепи каждому слабому заряду f отвечает ограниченный правый потенциал g такой, что $g = -Gf$. В дальнейшем рассматриваются лишь положительные возвратные непериодические цепи. Если при этом $\alpha f = 0$ и функция Gf ограничена, то существует правый потенциал g функции f, причем $g = -Gf$, и, наоборот, всякому правому потенциалу отвечает функция f с такими свойствами. Если мера $\eta(j) = \sum_i \alpha_i M_{ij}$ (где M_{ij} — математическое ожидание момента первого попадания в j, если траектория вышла из i) конечна, то существует оператор $\sum_0^\infty (P-A)^n$, где $A = \lim_{n\to\infty} P^n$. Этот оператор обратен к $I - P + A$, где I — тождественный оператор. Исследуются также понятия емкости, энергии и левого потенциала мер.

М. Г. Шур

9 В59. Усиленный закон больших чисел для одного класса цепей Маркова. Breiman Leo. The strong law of large numbers for a class of Markov chains. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 3, 801—803 (англ.)

Пусть в компактном хаусдорфовом пространстве X задана однородная цепь Маркова ξ_n с переходной функцией $p(x, A)$. Предполагается, что для этой цепи существует единственная инвариантная вероятностная мера $\pi(dx)$. Тогда для любой непрерывной на X функции f и любого $x \in X$, P_x-почти наверное

$$N^{-1} \sum_1^N f(\xi_n) \to \int \pi(dy) \int f(z)\, p(y, dz),$$

где через P_x обозначена мера, отвечающая цепи, выходящей из точки x.

М. Г. Шур

9 В60. Стационарные марковские цепи и независимые случайные величины. Rosenblatt M. Stationary Markov chains and independent random variables. «J. Math. and Mech.», 1960, **9**, № 6, 945—949 (англ.)

В более ранней работе того же автора (РЖМат, 1960, 14119) был поставлен вопрос о том, когда стационарный в узком смысле процесс x_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ допускает представление вида $x_n = g(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots)$, где $\{\alpha_n\}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$, g — измеримая по Борелю функция (это представление сходно с разложением Волда для регулярного процесса, в котором g — линейная функция $\{\alpha_n\}$, некоррелированных случайных величин. В настоящей работе показано, что если x_n — цепь Маркова со счетным множеством состояний, то для возможности такого представления необходимо и достаточно, чтобы она была эргодической и не имела периодических состояний.

В. Н. Тутубалин

9 В61. Обобщение цепи марковского типа: конечный марковский «каскад». Castoldi Luigi. Successioni stocastiche di tipo markoviano generalizzato: le «cascate» finite di Markov. «Atti Accad. ligure sci. e lettere», 1956 (1957), **13**, 45—54 (итал.; рез. франц.)

Марковским каскадом» автор называет цепь Маркова с конечным, но переменным на каждом шаге множеством состояний и дискретным временем. Вводится понятие циклического (число состояний имеет период во времени) и периодического (переходный закон периодичен) «каскада». Для периодического «каскада» устанавливается существование предельных вероятностей. Дано применение к одной задаче из формальной генетики.

Б. А. Севастьянов

9 В62. Переходные явления в ветвящихся процессах с n типами частиц. Чистяков В. П. «Теория вероятностей и ее применения», 1961, **6**, № 1, 31—46 (рез. англ.)

Известные результаты Б. А. Севастьянова (РЖМат, 1960, 4313) переносятся с использованием по сути дела тех же методов на случай процессов с несколькими типами частиц. Пусть $f_k(x_1, \ldots, x_n)$ — производящие функции, задающие процесс с частицами типов $T_1, \ldots, T_n$; $a_i^{(k)}$, $b_{ij}^{(k)}$, $c_{ijl}^{(k)}$ — значения в точке $(1, \ldots, 1)$ соответственно первых, вторых и третьих частных производных функции f_k. Рассматривается класс процессов $\mathbf{K}(\mathfrak{A}, \delta, B, c)$, выделяемых условиями: 1) матрица $a = \left(a_i^{(k)}\right)$ принадлежит замкнутому и компактному, в смысле сходимости по элементам, множеству $\mathfrak{A}$ неразложимых квадратных матриц порядка n с неотрицательными элементами вне главной диагонали 2) $0 < \delta < \sum_{i,k=1}^n b_{ij}^{(k)} < B < \infty$; 3) $c_{ijl}^{(k)} < c < \infty$. Важнейшей характеристикой типа процесса является $\lambda = \max(\operatorname{Re}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_n)$, где λ_i — собственные числа матрицы a. Обозначим $\mu_{kj}(t)$ — число частиц типа T_j в момент t, порожденных исходной частицей типа T_k и $F_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ — производящую функцию вектора $(\mu_{k1}(t), \ldots, \mu_{kn}(t))$. В работе находится асимптотическое представление функций $1 - F_k$ при $t \to \infty$ и $\lambda \to 0$, равномерное по всем процессам класса $\mathbf{K}$. Как следствие этого получаются асимптотические формулы для вероятностей $Q_k(t)$ выживания к моменту t потомства исходной частицы типа T_k. Для совместного распределения $S_k(t, \lambda, y_1, \ldots, y_n)$ случайных величин $Q_k(t)\, \mu_{kj}(t) \exp(-\lambda t)\, (u_k v_j)^{-1}$ (где u_k и v_j — некоторые нормирующие константы, определяемые матрицей a) доказывается, что при $t \to \infty$ и $\lambda \to 0$, равномерно по $f_k \in \mathbf{K}$

$$\sup_{\overline{y}} |S_k(t, \lambda, \overline{y}) - S(\overline{y})| \to 0,$$

где $S(y_1, \ldots, y_n)$ — показательное распределение, сосредоточенное на «биссектрисе» первого гипероктанта пространства $\{\overline{y}\}$. Доказываются две аналогичные теоремы, относящиеся к случаю, когда исходное число частиц одного и того же типа бесконечно возрастает.

В. М. Золотарев

9 В63. Полная положительность, вероятности поглощения и приложения. Karlin Samuel. Total positivity, absorption probabilities and applications. «Bull. Amer. Math. Soc.», 1961, **67**, № 1, 105—108 (англ.)

Функция $K(x, y)$ двух вещественных переменных называется вполне положительной порядка r (TP_r), если для

всех $1 \leqslant m \leqslant r$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ мы имеем:

$$K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_m \\ y_1 y_2 \ldots y_m \end{pmatrix} = \det \| K(x_i, y_j) \| \geqslant 0.$$

В работе рассматриваются вполне положительные функции, связанные с марковскими процессами. Приводятся, например, такие теоремы:

Теорема В. Если марковская цепь является TP_r (т. е. переходная матрица P_{ij} является TP_r, $r \geqslant 2$, i, j — неотрицательные целые), то вероятность перехода за n шагов $P^n_{0,j}$ есть TP_r по переменным $0 \leqslant j < \infty$, $n \geqslant 0$.

Теорема С. Пусть F^n_{i,j_0} означает вероятность того, что первое попадание в множество состояний $\leqslant j_0$ случилось на n-м шаге (начальное состояние $i > j_0$). Если цепь является TP_r, то F^n_{i,j_0} есть TP_r по переменным $n \geqslant 1$, $i > j_0$. В. Н. Тутубалин

9 В64. Конечные цепи Маркова с непрерывным временем. Kemeny John G., Snell J. Laurie. Finite continuous time Markov Chains. «Теория вероятностей и ее применения», 1961, **6**, № 1, 110—115 (англ., рез. русск.)

Для конечных однородных цепей Маркова вычисляются различные характеристики цепи. Например, если переходная матрица имеет вид

$$P(t) = \left(\frac{E}{R(t)} \,\middle|\, \frac{0}{Q(t)}\right),$$

где E — единичная, 0 — нулевая матрицы, то полагая

$$Q = E + \lim_{t \to +0} \frac{Q(t) - E}{t},$$

имеем: среднее время, проведенное в состоянии j при условии, что начальное состояние есть i, есть (i, j) элемент матрицы $N = (E - Q)^{-1}$; среднее время поглощения $M_i(T)$ (при условии, что частица выходит из i-го состояния) есть i-я компонента вектора $N\xi$, где $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — единичный вектор; $M_i(T^k)$ определяется вектором $\tau_k = k!N^k\xi$; k-й момент времени, проведенного в состоянии j, начиная из i, есть (i, j) элемент матрицы $N_k = k!NN^{k-1}_{dg}$, где N_{dg} есть матрица, получаемая из N заменой на нули всех недиагональных элементов. Вычисляются также характеристики эргодических цепей. В. Н. Тутубалин

9 В65. Пример марковского стационарного процесса. Neveu Jacques. Un exemple de processus markoviens stationnaires. «C. r. Acad. sci.», 1959, **249**, № 15, 1309—1311 (франц.)

Строится пример счетной цепи Маркова с непрерывным временем, для которой $\left.\frac{dP_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$ конечны и отличны от нуля при $i = j$ и равны нулю при $i \neq j$. Б. А. Севастьянов

9 В66. Некоторые свойства марковских процессов со счетным множеством состояний. Юшкевич А. А. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 239—246

9 В67. Дисперсии, ковариации и моменты марковских процессов с линейными средними. Malécot G. Variances, covariances et moments des processus de Markoff à moyennes linéaires. «Ann. Univ. Lyon», 1958, **A**, № 21, 33—66 (франц.)

Рассматривается случайный векторный марковский процесс с компонентами $q_i(t)$, причем условные математические ожидания $q_i(t + \tau)$ при фиксированных $q_k(t)$ представляют собой линейные функции последних. В этих условиях предлагаются способы вычисления вторых и старших моментов $q_i(t)$ для дискретного и непрерывного времени. Б. А. Севастьянов

9 В68. Марковские цепи и границы Мартина. Hunt G. A. Markoff chains and Martin boundaries. «Illinois J. Math.», 1960, **4**, № 3, 313—340 (англ.)

В статье предложено следующее обобщение понятия цепи Маркова. Пусть $(\Omega, B, \mathfrak{P})$ — измеримое пространство, а α и β — B-измеримые числовые функции ($-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$). Предполагается, что функция $x(n, \omega)$ при каждом ω определена для всех целых n таких, что $\alpha \leqslant n \leqslant \beta$, и принимает значения из счетного множества R. Набор $(x(n, \omega), \alpha, \beta)$ называется случайной цепью, если $\mathfrak{P}\{\Lambda_{n,r}\} < \infty$, где $\Lambda_{n,r} = \{\alpha \leqslant n \leqslant \beta,\ x(n, \omega) = r\}$, для всех целых n и $r \in R$. Функция α интерпретируется как момент рождения цепи, а β — как момент ее обрыва. Пусть k, m, n — целые числа и $k < m < n$, а $r_k, \ldots, r_n$ — точки из R. Положим $\Lambda = \{x(m, \omega) = r_m\}$, $\Lambda' = \{x(j, \omega) = r_j$ при всех $k \leqslant j \leqslant m\}$, $\Lambda'' = \{x(j, \omega) = r_j$ при всех $m \leqslant j \leqslant n\}$. Случайная цепь (x, α, β) называется цепью Маркова, если

$$\mathfrak{P}\{\Lambda' \cap \Lambda''\} = \mathfrak{P}\{\Lambda'\} \cdot \mathfrak{P}\{\Lambda''\} \cdot \mathfrak{P}\{\Lambda\}^{-1}$$

при условии, что $\mathfrak{P}\{\Lambda\} \neq 0$. Если существует переходная функция $P(r, s)$, такая, что $\mathfrak{P}\{\Lambda_{n,r} \cap \Lambda_{n+1,s}\} = \mathfrak{P}\{\Lambda_{n,r}\} P(r, s)$, то цепь Маркова называется P-цепью. Случайные цепи, которые могут быть в некотором смысле аппроксимированы P-цепями, автор называет почти P-цепями. Для почти P-цепей автор устанавливает ряд теорем, аналогичных известным из теории мартингалов. Следуя в основном Дубу, автор вводит для почти P-цепей понятие выходной границы Маркова. При этом ему удается полностью раскрыть вероятностный смысл этой границы и исправить недочеты в концепции Дуба. При обращении направления времени класс случайных цепей остается инвариантным. Это обстоятельство позволяет ввести понятие входной границы Мартина. Говоря грубо, входная граница определяет поведение траекторий цепи, в моменты времени, достаточно близкие к моменту рождения цепи, а выходная — в моменты, близкие к моменту обрыва. Входная граница строится из эксцессивных мер, а выходная — из эксцессивных функций. М. Г. Шур

9 В69. О возвратных марковских процессах. Ueno Tadashi. On recurrent Markov processes. «Kodai Math. Semin. Repts», 1960, **12**, № 3, 109—142 (англ.)

Пусть в топологическом пространстве R задан возвратный однородный марковский процесс $x_t(\omega)$, траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева. Для каждого борелевского множества $K \subset R$ определена вероятность $h_K(x, A)$ того, что траектория, вышедшая из x, в момент τ_K своего попадания в K окажется в множестве A. При некоторых дальнейших ограничениях, накладываемых на процесс и на пару множеств K и L, устанавливается существование и единственность пары вероятностных мер $\mu^K_L(A)$ и $\mu^L_K(A)$, для которых

$$\mu^K_L(A) = \int_L h_K(x, A)\, \mu^L_K(dx),$$

$$\mu^L_K(A) = \int_K h_L(x, A)\, \mu^K_L(dx).$$

Пары непересекающихся множеств, для которых определены эти меры, образуют класс F, а сами эти меры называются соответственно потенциалами равновесия на K и L относительно $R \setminus L$ и $R \setminus K$. Если $K' \subset K$ и $L \subset L'$, то существует константа $C(K', L', K, L)$ такая, что для всех борелевских множеств $E \subset K'$ справедливо равенство

$$C(K', L', K, L)\,\mu_{L_1}^{K_1}(E) = \int_K h_{K'\cup L}(x, E)\,\mu_K^L(dx).$$

Определение этой константы единственным образом распространяется на $F\times F$ так, чтобы

$$C(K_1, L_1, K_2, L_2)\cdot C(K_2, L_2, K_3, L_3) = C(K_1, L_1, K_3, L_3),$$

$$C(K_1, L_1, K_2, L_2) = C^{-1}(K_2, L_2, K_1, L_1).$$

Фиксируем $(K_0, L_0)\in F$ и пусть $C(K, L) = C(K_0, L_0, K, L)$. Величина $C(K, L)$ называется емкостью K относительно $R\setminus L$. В случае броуновского блуждания это определение сводится к классическому. Автор устанавливает ряд свойств емкости $C(K, L)$ и распространяет на рассматриваемые процессы формулу Феллера для инфинитезимального оператора одномерных процессов (РЖМат, 1957, 425). М. Г. Шур

9 В70. К вопросу о числе пересечений случайной функцией границы данной области. Гихман И. И. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 247—262

Рассматривается последовательность серий случайных векторов

$$\eta_{n0}, \eta_{n1}, \ldots, \eta_{nn}, \qquad (1)$$

связанных в цепь Маркова. Каждому вектору последовательности η_{nk} ставится в соответствие некоторый момент времени t_k $(0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1)$. Пусть D — область в пространстве (t, x) $(0 \leqslant t \leqslant 1;\ x\in R_n)$ обладающая следующим свойством: сечения $D(\tau)$ области D плоскостями $t = \tau$ не пусты; граница области состоит из конечного числа гладких поверхностей. Последовательность (1) пересекает границу области D в момент времени t_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, если $\eta_{nk}\overline{\in} D(t_k)$, $\eta_{n,k-1}\in D(t_{k-1})$; или же $\eta_{nk}\in D(t_k)$, $\eta_{n,k-1}\overline{\in} D(t_{k-1})$. Изучается случайная величина

$$\sigma_r = \sum \tau(\eta_{nk}, t_k),$$

где $\tau(t, x)$ — некоторая непрерывная весовая функция в пространстве (t, x) и суммирование ведется по тем моментам t_k времени пересечения границы области D, для которых $k \geqslant r + 1$. В условиях сходимости η_{nk} к непрерывному (по времени) процессу Маркова в пределе при $n\to\infty$ для производящей функции условного распределения $P\{\sigma_r < z \mid \eta_{nr} = x\}$ получено интегральное уравнение. В. С. Королюк

9 В71. О локальном поведении траекторий диффузионного процесса. Вентцель А. Д. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 236—238

9 В72. Замечания о выборочных функциях некоторых стохастических процессов. Fisz M. Remarks on the sample functions of some stochastic processes. «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.», 1960, **8**, № 6, 355—358 (англ.; рез. русск.)

Для сепарабельных мартингалов и одномерных марковских процессов на прямой найдены условия непрерывности траекторий, более слабые, чем соответствующие условия Добрушина (РЖМат, 1958, 10050) и Дынкина—Кинни (Изв. АН СССР, (сер. матем.), 1952, **16**, 563—672). Для траекторий произвольных сепарабельных процессов даны новые признаки скачкообразности, отсутствия разрывов второго рода и т. п. Например, получено следующее утверждение. Пусть $\{x_t, t\in I\}$ — сепарабельный процесс, заданный на прямой (I — некоторый отрезок прямой). Пусть для любого $\varepsilon > 0$ и любой последовательности интервалов I_n, длины которых стремятся к 0 при $n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\mid \Delta_n \mid > \varepsilon\} = 0$, где Δ_n означает приращение процесса x_t на I_n. Тогда, какова бы ни была фиксированная точка разрыва t_0, у траектории x_t в t_0 с вероятностью единица существуют пределы слева и справа. Доказательства не приводятся. М. Г. Шур

9 В73. Теория прогнозирования многомерных стохастических процессов. III. Неограниченные спектральные плотности. Masani P. The prediction theory of multivariate stochastic processes. III. Unbounded spectral densities. «Acta math.», 1960, **104**, № 1-2, 141—162 (англ.)

Главным итогом реферируемой статьи является распространение теоремы 8.10 работы Винера и Масани (РЖМат, 1960, 1919) о факторизации спектральной плотности $F'(\lambda)$ стационарного случайного процесса на более общий случай. Именно, от спектральной плотности требуется лишь, чтобы матричная функция $[F'(\lambda)]^{-1}$ была интегрируема. В работе содержатся и некоторые другие результаты, в частности, доказывается известное условие минимальности стационарного процесса полного ранга. Ю. А. Розанов

9 В74. Спектральные свойства многомерных стационарных процессов и граничные свойства аналитических матриц. Розанов Ю. А. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 4, 399—414 (рез. англ.)

Представим n-мерный регулярный ранга m процесс $X(t)$ с дискретным временем при помощи скользящего суммирования

$$X(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a(\tau)\,u(t-\tau), \qquad (1)$$

где $a(\tau)$ — прямоугольные $(m\times n)$-матрицы, а $u(\tau)$ — m-мерный процесс с попарно ортогональными значениями. В статье подробно исследуются аналитические матрицы

$$A(z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a(\tau)\,z^{\tau},$$

соответствующие всевозможным представлениям $x(t)$ в виде (1); в частности, те из них, для которых в представлении (1): $H_x^-(t) = H_u^-(t)$ для всех t (где $H_x^-(\tau)$ — линейное замыкание $x(t)$, $t \leqslant \tau$, $k = 1, \ldots, n$). Дан (для некоторых частных случаев) способ нахождения этих последних матриц через значения спектральной $x(t)$. В виде гипотезы сформулирован способ решения этой задачи в общем случае. В заключение доказана формула, позволяющая эффективно находить ошибку экстраполирования процесса ранга m на один шаг вперед. Р. Ф. Матвеев

9 В75. Канонические представления гауссовских процессов и их приложения. Hida Takeyuki. Canonical representations of gaussian processes and their applications, «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto», 1960, **A33**, № 1, 109—155 (англ.)

Дается систематическое изложение теории канонических представлений действительных гауссовских процессов, разытой недавно Леви (РЖМат, 1958, 5907), и излагаются некоторые новые факты, полученные автором. Пусть $Y(t)$, $t\in T$ — гауссовский процесс с $E(Y(t)) = 0$. Тройка $(dB(t), \mathfrak{M}_t, F(t, u))$ называется представлением $Y(t)$, если: 1) $B(\cdot)$ — гауссовская случайная мера, определенная на поле $\mathbf{B}_T$ борелевских подмножеств T, для которой

$$E(B(M)) = 0, \quad E(B(M)^2) = v(M);$$

2) $F(t, u)$ — измеримая по Борелю функция u, обращающаяся в нуль при $u > t$ и принадлежащая $L^2(v)$ для каждого $t\in T$; 3) $X(t) = \int\limits_{(-\infty, t]\cap T} F(t, u)\,dB(u)$ являет-

ся версией $Y(t)$; 4) $\mathfrak{M}_t$ — замкнутое линейное многообразие, порожденное $\{X(\tau), \tau \leqslant t\}$. $F(t, u)$ называется ядром представления. Это представление называется каноническим, если

$$E(X(t) \mid \mathbf{B}_s) = \int^s F(t, u)\, dB(u)$$

для каждого $s \leqslant t$, где $\mathbf{B}_s$ — наименьшее борелевское поле измеримых ω множеств, относительно которого измеримы все $X(\tau)$ при $\tau \leqslant s$.

В первом разделе статьи дается необходимое и достаточное условие существования канонического представления, основанное на теореме Хеллингера—Хана, а также строится критерий, позволяющий по свойствам ядра представления определять, является ли это представление каноническим или нет.

Во втором разделе изучаются N-кратные марковские процессы, представляющие собой обобщение введенных Дубом и П. Леви процессов, дифференцируемых до $N-1$-го порядка. Здесь доказано, что каноническое ядро N-кратного марковского процесса (не обязательно дифференцируемого) является ядром Гурса N-го порядка, т. е. представимо в виде $\sum_{k=1}^{N} f_k(t)\, g_k(u)$. Кроме того, показано, что стационарный N-кратный марковский процесс является суммой простых марковских процессов, называемых броуновскими движениями Орнстейна—Уленбека, канонические ядра которых являются линейными комбинациями функций следующего вида:

$$e^{-\lambda(t-u)} \sin \mu (t-u),$$

$$t^k u^{n-k} e^{-\lambda(t-u)} \sin \mu (t-u) \quad (\mu \neq 0),$$

$$e^{-\lambda(t-u)} \cos \mu (t-u),$$

$$t^k u^{n-k} e^{-\lambda(t-u)} \cos \mu (t-u),\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ n < N.$$

В третьем разделе изучаются $M_N(t)$ процессы Леви, получающиеся путем осреднения по сфере радиуса t процессов $X(A)$ — броуновских движений с N-мерным параметром. Леви получил каноническое представление и кратное марковское свойство для процессов $M_N(t)$ лишь в случае нечетных N. Благодаря преобразованию $M_N(t)$ в некоторый стационарный процесс, автору удается распространить эти результаты на случай четных N.

В. М. Волков

9 В76. Некоторые асимптотические свойства гауссовского случайного процесса. Яковлев В. П. «Радиотехн. и электроника», 1960, **5**, № 10, 1728—1730

Известно, что при широких ограничениях выбросы стационарного гауссовского процесса за высокий уровень x образуют поток, приближающийся при соответствующей нормировке к пуассоновскому при $x \to \infty$. В заметке ставится задача выяснить, с какой скоростью должна убывать корреляционная функция $R(t)$ гауссовского процесса, чтобы поток выбросов приближался к пуассоновскому. Однако выясняются только условия, при которых выполняется некоторое необходимое условие для приближения потока к пуассоновскому. А именно, доказывается, что если при $t \to \infty$

$$R(t) = o\left(\frac{1}{\ln t}\right) \text{ и } R'(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln t}}\right),$$

то появление выбросов нормированного потока в непересекающихся интервалах: $(t, t+dt)$ и $(t+\tau, t+\tau+dt)$ в пределе при $x \to \infty$ независимы. (Для сходимости потока к пуассоновскому надо, чтобы, кроме того, оказывались независимыми в совокупности появления выбросов в трех, четырех и т. д. интервалах).

В. А. Волконский

9 В77. О спектре выборочных стационарных случайных процессов. Prouza Ludvík. O spektru «vzorkovaného» stacionárního náhodného procesu. «Aplikace mat.», 1960, **5**, № 5, 394—397 (чешск.; рез. русск., англ.)

Исследуется соотношение между спектром $F(\lambda)$ стационарного случайного процесса и спектром $V(\lambda)$ соответствующей выборочной случайной последовательности. Доказывается формула

$$V(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{F[\lambda + 2m\pi] - F[(2m-1)\pi]\}$$

и указывается ее связь с формулой Вольда и формулой для спектральных плотностей. Резюме автора

9 В78. О характеризации процессов, для которых оптимальные в среднем квадратичном системы имеют заданный вид. Balakrishnan A. V. On a characterization of processes for which optimal mean-square systems are of specified form. «IRE Trans. Inform. Theory», 1960, **6**, № 4, 490—500 (англ.)

Обычная задача нахождения оптимальной (в среднем квадратичном) оценки «истинного» сигнала $X(t_0)$ или некоторой функции от него, например, $Q[X(t_0)]$ по наблюденным значениям процесса $Y(t)$, $t \in \Pi$ ($Y(t)$ есть полезный сигнал+шум) имеет, как известно, следующее, вообще говоря, нелинейное решение:

$$E\{Q[X(t_0)] \mid Y(t),\ t \in \Pi\} = Q^*.$$

Автор рассматривает задачу, являющуюся в некотором смысле обратной. Каким должен быть процесс $X(t)$, чтобы наилучшая оценка Q^* имела заданный вид. Интересно отметить, что обращенная задача, решаемая в терминах многомерных характеристических функций (х. ф.) процесса $X(t)$, становится уже линейной. Будем обозначать через $C_X(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ х. ф. вектора $X(t_0), \ldots, X(t_n)$ и т. д. Обозначим через D_k дифференциальный оператор $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_k}\left(D = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\right)$.

Теорема 6. Если $Y(t) = X(t) + N(t)$, процессы $X(t)$, $N(t)$ независимы, имеют все моменты и

$$E\{X(t_0) \mid Y(t_0), \ldots, Y(t_n)\} = (1-a_0) Y(t_0) + \sum_1^n a_k Y(t_k),$$

а $\neq 0$, то для некоторого $\delta > 0$ и всех t_l таких, что $\sqrt{t_0^2 + t_1^2 + \ldots + t_n^2} < \delta$, х. ф. вектора $X(t_0), \ldots, X(t_n)$ имеет вид:

$$C_X(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \exp\{R(t_1, c_1, \ldots, c_n) + g(c_1, c_2, \ldots, c_n)\},$$

где

$$c_1 = a_0 t_1 + a_1 t_0,\ c_2 = a_2 t_1 - a_1 t_2, \ldots, c_n = a_n t_1 - a_1 t_n,$$

$$R(t_1, c_1, \ldots, c_n) =$$

$$= \left[\frac{1}{a_1}\int_0^{t_1} Q\left[\frac{a_0 t_1 - c_1}{a_1}, t_1, \frac{a_2 t_1 - c_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_n t_1 - c_n}{a_1}\right] dt_1,\right.$$

$$Q(t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \left[(1-a_0) D_0 - \sum_1^n a_k D_k\right] \log C_N(t_0, t_1, \ldots, t_n),$$

g — произвольная функция.

Эти и подобные им результаты основаны на теоремах следующего типа.

Теорема 2. Пусть случайные величины $y_k = x_k + N_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $\{x_k\}$, $\{N_k\}$ независимы и имеют все моменты. Пусть Q — полином одной переменной, P — полином $n+1$ переменной. Тогда равенство

$$E\{Q(x_0) \mid y_0, y_1, \ldots, y_n\} = P\{y_0, \ldots, y_n\}$$

имеет место в том и только том случае, если

$$C_N(t_0,\ldots,t_n)\,Q(D_0)\,C_x(t_0,\ldots,t_n) =$$

$$= P(D_0, D_1,\ldots,D_n)\,C_x(t_0,\ldots,t_n)\,C_N(t_0,\ldots,t_n).$$

И. А. Ибрагимов

9 В79. О предельном процессе, который приводит асимптотически к спектральной плотности f^{-2}. Akaike Hirotugu. On a limiting process which asymptotically produces f^{-2} spectral density. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1960, 12, № 1, 7—11 (англ.)

Исследуется процесс, имеющий в пределе спектральную плотность f^{-2} (f—частота) при довольно широких предположениях. Рассматривается последовательность стационарных стохастических процессов $\varepsilon_j(t)$ ($j=1,2,\ldots$), где $\varepsilon_j(t)$ взаимно независимы с одинаковыми конечномерными распределениями, нулевыми средними, конечной дисперсией и спектральной плотностью $p_\varepsilon(t)$. Берется исходный процесс $x_0(t)$ и после сглаживания его с помощью интегрируемой функции $s(t)$ и прибавления к нему стационарного стохастического процесса $\varepsilon_1(t)$ получим $x_1(t)$

$$x_1(t) = s*x_0(t) + \varepsilon_1(t),$$

где

$$s*x_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t-\tau)\,s(\tau)\,d\tau,$$

$$s(t) \geqslant 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,dt = 1.$$

Предполагается, что $x_0(t)$ удовлетворяет некоторым условиям регулярности. После n-го шага имеем

$$x_n(t) = s*x_{n-1}(t) + \varepsilon_n(t),$$

$$x_n(t) = \varepsilon_n(t) + s*\varepsilon_{n-1}(t) + s*s*\varepsilon_{n-2}(t) + \ldots$$

$$\ldots + s*\ldots*s*\varepsilon_1(t) + s*s*\ldots*s*x_0(t).$$

Пренебрегая последним слагаемым, положим

$$y_n(t) = \varepsilon_n(t) + s*\varepsilon_{n-1}(t) + \ldots + s*\ldots*s*\varepsilon_1(t).$$

Тогда процесс $y_n(t)$ стационарный и имеет спектральную плотность $p_n(f)$, где

$$p_n(f) = \frac{1 - |\sigma(f)|^{2n}}{1 - |\sigma(f)|^2}\,p_\varepsilon(f),$$

$$\sigma(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f t}\,s(t)\,dt$$

и в пределе

$$\lim_{n\to\infty} p_n(f) = \frac{1}{1 - |\sigma(f)|^2}\,p_\varepsilon(f), \quad f \neq 0.$$

Делаются предположения:

А. 1. $\varepsilon_j(t)$ есть белый шум, т. е. $p_\varepsilon(f) = c \quad (>0)$;

А. 2. $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 s(t)\,dt < +\infty$, $|\sigma(f)|^2 = 1 - bf^2 + o(f^2)$ ($|f| \to 0$), где $b = \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 s(t)\,dt - \left(\int ts(t)\,dt\right)^2\right)(2\pi)^2$;

А. 3. $|\sigma(f)|^2 - (1 - bf^2)$ достаточно мало.

Тогда верна теорема: При предположениях А. 1 и А. 2 имеем

$$\lim_{n\to\infty} p_n(f) = \frac{c}{bf^2} + o(f)^2 \quad (|f| \to 0).$$

Таким образом, если предположение А. 3 верно и если мы пренебрежем очень низкими частотными компонентами, то получим требуемое f^{-2}. Если $|\sigma(f)|^2 = 1 - bf^2 + df^4 + o(f^4)$, $d > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} p_n(f) = \frac{c}{bf^2(1 - df^2/b)} + o(f^4) \quad (|f| \to 0).$$

В. И. Бабкин

9 В80. Быстрая стохастическая аппроксимация. Kesten Harry. Accelerated stochastic approximation. «Ann. Math. Statistics», 1958, 29, № 1, 41—59 (англ.)

Рассматривается новый стохастический аппроксимационный процесс, подобный процессу Дворецкого (РЖМат, 1960, 14138). Очевидно, что частые изменения в знаке

$$(x_n - \theta) - (x_{n-1} - \theta) = x_n - x_{n-1}$$

указывают на то, что $|x_n - \theta|$ мало, в то время как незначительные изменения в знаке $x_n - x_{n-1}$ указывают, что x_n еще далеко от θ. Учитывая это, автор строит процесс:

$$x_{n+1} = T_n(x_1\ldots x_n) + by_n,$$

где x_1, y_n—случайные величины, а a_n—последовательность положительных чисел

$$b_1 = a_1, \; b_2 = a_2, \; b_n = a_{t(u)}$$

$$t(n) = 2 + \sum_{i=3}^{n} i[(x_i - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2})]$$

и

$$i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Полученный процесс может улучшить сходимость x_n к θ.

Т. П. Красулина

9 В81. Заметки о стохастической аппроксимации. Dupač Václav. Notes on stochastic approximation methods. «Чехосл. матем. ж.», 1958, 8, № 1, 139—149 (англ., рез. русск.)

Изучаются асимптотические свойства процессов Роббинса — Монро и Кифера — Вольфовица в случае, когда искомое решение лежит в некотором заранее известном конечном промежутке. Для этого случая получено значительное ослабление условий, установленных ранее (РЖМат, 1956, 3203). Кроме того, автором предложен новый стохастический аппроксимационный метод для решения системы линейных уравнений с симметричной матрицей коэффициентов.

Т. П. Красулина

9 В82 К. Исчисление вероятностей с точки зрения приложений. Girault Maurice. Calcul des probabilités en vue des applications. Paris, Dunod, 1960, XVI, 162 p., ill. (франц.)

Элементарный учебник по теории вероятностей, рассчитанный на прикладников, а также на начинающих математиков, желающих специализироваться по теории вероятностей и статистике. Материал излагается в основном без доказательств. Автор «старается изложить основные идеи, опираясь на доказательства лишь поскольку это возможно в столь кратком учебнике». Весьма интересно изложено понятие независимости двух событий, которое автор трактует как особое свойство двух сечений вероятностной массы.

Содержание: I. Введение. II. Основны. III. Общие теоремы и вероятностные законы. IV. Математическое ожидание, моменты и средние. V. Сложение независимых случайных величин; характеристические функции. VI. Вероятностные законы: биномиальный, гипергеометрический, Пуассона, Коши, нормальный. VII. Повторяемые испытания; стохастическая сходимость. Здесь излагаются понятия сходимости по распределению, по вероятности, закон больших чисел. VIII. Многомерные распределения, характеристические функции. IX. Многомерный нормальный закон. X. Выборочные законы. В этой главе перечисляются наиболее употребительные распределения математической статистики: Пирсона, Стьюдента, Фишера, Колмогорова — Смирнова, γ- и β-распределения. В книге есть опечатки, которые, однако, мало затрудняют чтение.

И. Ф. Красичков

9 В83 К. Элементарное введение в теорию вероятностей. Vadnal Alojzij. Elementarni uvod v verjet-

nostni račun. Ljubljana, «Mladinska knjiga», 1959, 156 s., il. «Bibliogr. Jugosl.», 1960, 11, № 11, 499 (сербо-хорв.)

9 В84 К. Элементы теории марковских процессов и их приложения. Bharucha-Reid A. T. Elements of the theory of Markov processes and their applications. New York — London, McGraw — Hill Book Co., 1960, xi, 468 pp., ill., 89 sh. «Brit Nat. Bibliogr.», 1960, № 560, 11 (англ.)

9 В85 К. Вероятностные процессы. Вып. I. Ито К. Перев. с японск. М., Изд-во ин. лит., 1960, 133 стр., 4 р. 25 к.

Лаконичное изложение на высоком теоретическом уровне вопросов теории вероятностных процессов. Первая глава посвящена теоретико-множественным основаниям теории вероятностей. Во второй главе рассматриваются процессы с независимыми приращениями. Определяется сепарабельность вероятностного процесса, рассматривается строение стохастически непрерывного сепарабельного процесса с независимыми приращениями, сложный пуассоновский процесс, безгранично делимые и устойчивые распределения. В третьей главе изучаются стационарные процессы, их спектральное разложение, эргодические свойства. Рассматриваются гауссовские стационарные процессы и обобщения стационарных процессов. Основные доказательства проведены с помощью аппарата характеристических функций.

А. Х. Заславский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Редактор *Н. В. Смирнов*

9 В86. О локально оптимальном порядковом критерии. Pfanzagl J. Über lokal optimale Rang—Tests. «Metrika», 1960, 3, № 2, 143—150 (нем.; рез. англ.)

Пусть случайные величины $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ попарно независимы и имеют функции распределения $F = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_N(x))$ соответственно. Пусть R_l означает порядковый номер X_l в вариационном ряду, тогда $R = (R_1, R_2, \ldots, R_N)$ является одной из перестановок чисел $(1, 2, \ldots, N)$. Класс распределений $\mathfrak{F}_\Theta$ определяется следующим образом. $\mathfrak{F}_\Theta$ содержит все распределения $(h_1(F, \Theta), h_2(F, \Theta), \ldots, h_N(F, \Theta))$, где функции $h_l(u, \Theta)$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$ определены для $u \in [0, 1]$ и $\Theta \in [0, \Theta_0]$ и строго возрастают и дифференцируемы по u, кроме того, $h_l(0, \Theta) = 0$, $h_l(1, \Theta) = 1$ для всех $\Theta \in [0, \Theta_0]$, $h_l(u, 0) = u$ для всех $u \in [0, 1]$ и F пробегает класс всех непрерывных функций распределений. Доказывается, что среди критериев выбора между гипотезами $H_0 = H_0(F \in \mathfrak{F}_0)$ и $H_1 = H_1(F \in \mathfrak{F}_\Theta)$, основанных на использовании набора R локально оптимальным при $\Theta \to 0$, является критерий, основанный на статистике $\sum_{i=1}^{N} E h_i^*(U^{R_i})$, где

$$h_l^*(u) = \frac{\partial^2}{\partial \Theta \partial u} h_l(u, \Theta)\Big|_{\Theta=0}$$

и U^{r_l} образуют вариационный ряд для N независимых равномерно на $[0, 1]$ распределенных случайных величин. Указывается, что, задавая h_l, специфическим образом можно придти к результатам других авторов относительно оптимальных порядковых критериев, в частности критерия Уилкоксона.

Б. С. Флейшман

9 В87. Заметки по статистическим приложениям теории информации. III. Sakaguchi Minoru. Notes on statistical applications of the information theory III. «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs», 1957, 5, № 1, 9—16 (англ.)

Работа продолжает исследование Линдли (РЖМат, 1959, 1768) по приложениям теории информации к статистике. Пусть $\mathfrak{X}$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{B}$ — его подмножества, образующие σ-алгебру; рассматриваем пару $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$; Θ — пространство параметров, $\{p(x \mid \theta) \mid \theta \in \Theta\}$ — семейство обобщенных плотностей по отношению к общей доминирующей мере. Набор $\varepsilon \equiv [(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}), \{p(x \mid \theta) \mid \theta \in \Theta\}]$ называется экспериментом (э.). Для сближения с теорией передачи информации Шеннона Θ рассматривается как пространство входов θ, передаваемых дискретным стохастическим процессом; выбор θ дается с плотностью $p(\theta)$; результаты выбора независимы; $\mathfrak{X}$ — пространство выходов, передаваемых с помехами, распределенными с условной плотностью $p(x \mid \theta)$. Скорость передачи информации определяется по Шеннону

$$T(\theta; x) = H(\theta) - H_x(\theta) = \iint p(\theta)\, p(x \mid \theta) \lg p(x \mid \theta)\, d\theta dx,$$

где $p(x) = \int p(x \mid \theta)\, p(\theta)\, d\theta$; $p(x)$, $p(\theta)$ не всегда одни и те же символы плотностей; dx, $d\theta$ — символы дифференциалов по мерам. В основном изучаются э. с дискретным Θ: $\{p(x, \theta)\}$ есть набор $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ и э. есть $\varepsilon \equiv [(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}), \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}]$. Первоначальное знание $p(\theta)$ дается как $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$; $\xi_l \geqslant 0$, $\sum \xi_l = 1$. Количество информации в ε относительно параметров:

$$I(\varepsilon, \xi) = \sum_{l=1}^{n} \xi_l \int f_l(x) \lg \frac{f_l(x)}{\sum_{l=1}^{n} \xi_l f_l(x)}\, dx$$

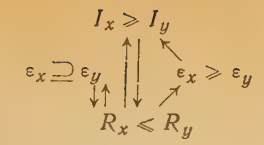
обозначается $T(\xi_1, \ldots, \xi_n; f_1, \ldots, f_n)$. При $n = 2$ оно имеет вид $T(\xi_1, 1 - \xi_1; f_1, f_2)$. При этом $T'_\xi(0, 1; f_1, f_2)$ и $T'_\xi(1, 0; f_1, f_2)$ совпадают с информационными числами Каллбака — Лейблера (Kullback-Leibler. Ann. Math. Statistics, 1951, 22, 79—86). Емкостью э. называется $C = \sup_\xi T(\xi_1, \ldots, \xi_n; f_1, \ldots, f_n)$.

Теорема 1. Пусть $Q = Q_{mn} = \| q_{ij} \|$ — стохастическая матрица. Тогда

$$C\left(\sum_{l=1}^{n} q_{1l} f_l, \ldots, \sum_{l=1}^{n} q_{ml} f_l\right) \leqslant C(f_1, \ldots, f_n).$$

Выводятся два следствия о «смешении» э. Пусть ε_x и ε_y два э. с одним и тем же Θ. Если $I(\varepsilon_x, p(\theta)) \geqslant I(\varepsilon_y, p(\theta))$ для всех предварительных познаний $p(\theta)$, то, следуя Линдле (см. выше), пишем $\varepsilon_x \geqslant \varepsilon_y$ (ε_x информативнее ε_y). Далее производится сравнение дихотомных опытов — информационное, и с помощью функций решений.

Теорема 2. Пусть $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$; $\Theta_0 \cap \Theta_1 = 0$; пусть $R_x(\xi_\lambda, \Theta_0, \Theta_1)$ байесова функция риска, различающая между двумя гипотезами $\{f_\theta \mid \theta \in \Theta_0\}$ и $\{f_\theta \mid \theta \in \Theta_1\}$ с функцией потери 1 или 0 и предварительным знанием ξ. Пусть $\xi_\lambda = \lambda \xi_0 + (1 - \lambda)\, \xi_1$ (ξ_0 (ξ_1) распределена на θ_0 (θ_1)). Если для всех $\lambda \in [0, 1]$ и для двух э. ε_x и ε_y имеем $R_x(\xi_\lambda; \Theta_0, \Theta_1) \leqslant R_y(\xi_\lambda; \Theta_0, \Theta_1)$, то $I(\varepsilon_x^*, \lambda) \geqslant I(\varepsilon_y^*, \lambda)$, где $\varepsilon_x^* = [(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}), \{p_0(x), p_1(x)\}]$, $p_l(x) = \int \theta_l f_\theta(x)\, d\xi_l$ $(i = 0, 1)$; $I(\varepsilon_x^*, \lambda) = T(\lambda, 1 - \lambda, p_0(x), p_1(x))$ и аналогичные для ε_y. Далее сопоставляются различные сравнения э. ε_x и ε_y, в частности, по Д. Блекуэллу $\varepsilon_x \supseteq \varepsilon_y$ (Blackwell D. Proc. Berkley Sympos. 1951, 94—102; см. также вышеупомянутую статью Линдли); $I_x \geqslant I_y$ далее означает, что равномерно по $\xi \in [0, 1]$ $\xi I_x(1 : 2) + (1 - \xi) I_x(2 : 1) \geqslant \xi I_y(1 : 2) + (1 - \xi) I_y(2 : 1)$, где $I_x(1 : 2)$ и $I_x(2 : 1)$ — информационные числа Куллбака — Лейблера (см. выше). В этих обозначениях сравнимость дихотомных опытов поясняется схемой



Далее рассматривается смесь э.

Примечание референта. Опечатки: на стр. 12 в формуле для $R_x(\xi_\lambda; \theta_0, \theta_1)$ пропущен множитель λ; в следующей формуле под интегралом вместо $f_0(x)$ должно быть $p_0(x)$; на стр. 13 под интегралом в формуле для $G(u; \xi_0, \xi_1)$ должно быть $p_0(y)$ вместо $g_0(y)$.

Ю. В. Линник

9 В88. Заметки по статистическим приложениям теории информации. III. Сакагучи Минору (Sakaguchi M.), «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1959, **3**, № 3, 105—113

Перевод с англ. см. реф. 9В87.

9 В89. Критерии, касающиеся случайных точек на окружности. Kuiper Nicolaas H. Tests concerning random points on a circle. «Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.», 1960, **A63**, № 1, 38—47; «Indagationes Math.», 1960, **22**, № 1, 38—47 (англ.)

В связи с задачей об исследовании наблюдений над направлениями перелета птиц, исследуются случайные величины, принимающие значения на окружности, определяются среднее значение и разброс таких величин, строятся и исследуются непараметрические критерии типа критериев Колмогорова и Колмогорова — Смирнова для независимых наблюдений на окружности.

Р. Л. Добрушин

9 В90. Подтверждающая мощность наблюдений, метризованная для выбора среди гипотез. Часть I. Finch Henry A. Confirming power of observations metricized for decisions among hypotheses. Part I. «Philos. Soc.», 1960, **27**, № 3, 293—307 (англ.)

Рассматривается схема выбора по наблюдению O одной из двух гипотез H и H'. На основании теоретико-информационных соображений и формулы Байеса мощность наблюдения определяется как функция $P(H)$ и $\frac{P(O \mid H)}{P(O)} - 1$. Здесь $P(H)$ — априорная вероятность того, что гипотеза H верна; $P(O \mid H)$ — условная вероятность наблюдения O при условии, что верна гипотеза H;

$$P(O) = P(H)\,Pr(O \mid H) + Pr(H')\,Pr(O \mid H').$$

Дается подробный анализ логических основ теоремы Байеса. Доказывается и анализируется утверждение:

$$\max \Delta P(H) = P(H')\,[1 - P(O \mid H')],$$

где $\Delta P(H)$ — разность между апостериорной и априорной вероятностями гипотезы H. Изложение в значительной степени носит философский характер.

Л. Я. Савельев

9 В91. Критерии независимости и симметрии в случае многомерных нормальных совокупностей. Roy J. Tests for independence and symmetry in multivariate normal populations. «Sankhya, Indian J. Statist.», 1960, **22**, № 3-4, 267—278 (англ.)

Рассмотрен ряд известных критериев независимости и симметрии нескольких выборок из нормальных совокупностей. Получены асимптотические разложения в ряды функций распределения статистик, соответствующих этим критериям. Приведена таблица численных значений коэффициентов в первых двух членах указанных рядов.

М. Г. Шур

9 В92. О некоторых задачах оценки для распределения Пуассона и метод χ^2. Klinken J. van. On some estimation problems with regard to the Poisson — distribution and the χ^2 — minimum method. «Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker», 1959, **59**, № 2, 297—306 (англ.; рез. нем., франц., итал.)

Пусть наблюдаются величины $x_{t_1}, \ldots, x_{t_h}$, распределенные каждая по закону Пуассона со средними

$$\omega_1 \sum_{v=0}^{k} \lambda_v t_1^v, \ldots, \omega_h \sum_{v=0}^{k} \lambda_v t_k^v,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — параметры, подлежащие оценке, а $t_1, \ldots, t_k$ — некоторые постоянные; ω_l — веса, зависящие от объема наблюдений. Обсуждается метод минимума χ^2 для оценки $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Затем к этой же задаче применяется метод наименьших квадратов, который для данного случая включает в себя модифицированный метод минимума χ^2. Далее, используя рекуррентные соотношения вида

$$E(n_x) = \varphi(\lambda) f(x) En_{x-1}$$

для наблюдаемых частот $n_x, x = 1, 2, \ldots$, которые имеют место для многих дискретных распределений, в частности для пуассоновского, биномиального и отрицательно биномиального, автор показывает, что оценки наименьших квадратов являются состоятельными.

И. Ф. Красичков

9 В93. Об одном критерии для экспоненциальных распределений. Störmer Horand. Über einen Exponentialverteilungstest. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, Sonderh., 96—97 (нем.)

В классе M всех одномерных функций распределения с конечным математическим ожиданием μ выделяется подкласс M_0 экспоненциальных функций распределения вида $F_x(t/\mu) = 1 - e^{-t/\mu}$ и строится критерий для различения по выборке объема n двух гипотез: нулевой $H_0 = \{F_x(t) \in M_0\}$ и простой альтернативной $H_1 = \{F_x(t) = F_x^1(t) \in M - M_0\}$. В статье приводятся выражения для статистики и критической области этого критерия. Утверждается также, что критерий является состоятельным при любой альтернативной гипотезе типа H_1. Доказательства отсутствуют.

В. М. Волков

9 В94. Равенства более чем двух дисперсий и более чем двух матриц дисперсии против некоторых альтернатив. Gnanadesikan R. Equality of more than two variances and of more than two dispersion on matrices against certain alternatives. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 1, 177—184 (англ.)

Рассматривается $k+1$ одномерная нормальная совокупность с дисперсиями $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$ и испытывается сложная гипотеза $H_0: \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ против альтернативной $H_2': \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2} \neq 1$. Пусть s_i^2 — обычные оценки σ_i^2 с n степенями свободы, которые получаются на основании независимых выборок объемов n_l. Область приема гипотезы H_0 выбирается как

$$F_{i1} \leqslant \frac{s_i^2}{s_0^2} \leqslant F_{i2} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Указывается некоторый (неоптимальный) способ выбора границ F_{i1} и F_{i2}. Исследуется вероятность ошибки второго рода при гипотезе H_0' и находится совокупный доверительный интервал для $\frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2}$:

$$\frac{s_i^2}{s_0^2 F_{i2}} \leqslant \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2} \leqslant \frac{s_i^2}{s_0^2 F_{i1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

с

совокупным доверительным коэффициентом $1-\alpha$, где α — заданное положительное число. Далее полученные результаты обобщаются на случай многих переменных, где вместо σ_i^2 берется матрица дисперсии. Исследуются некоторые распределения вероятностей, связанные с рассматриваемым вопросом. М. К. Камалов

9 В95. Номограмма для функции вероятности χ^2. Смирнов С. В., Потапов М. К. «Теория вероятностей и ее применения», 1961, **6**, № 1, 138—140 (рез. англ.)

Предлагается номограмма для функции вероятности χ^2

$$P(\chi^2, n) = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\chi}^{\infty} z^{n-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

в области изменения $1 \leqslant n \leqslant 110$, $1 \leqslant \chi^2 \leqslant 150$. В средней части номограммы $(0{,}1 \leqslant P \leqslant 0{,}9)$ относительная погрешность для P не превышает 0,03, в концевых частях погрешность не превышает 0,1. Приводится уравнение шкалы P и координаты опорных точек шкал n и χ^2. А. Х. Заславский

9 В96. Об нерандомизированной оптимальности и рандомизированной неоптимальности симметрического планирования. Kiefer J. On the nonrandomized optimality and randomized nonoptimality of symmetrical designs. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 3, 675—699 (англ.)

Пусть Y — вектор-столбец, компоненты Y_i которого являются независимыми нормальными случайными величинами с одной и той же дисперсией σ^2 $(i = 1, \ldots, N)$. μ — неизвестный вектор размерности m. X_d — известная матрица с размерами $N \times m$, зависящая от индекса d («плана»). Математическое ожидание Y, когда μ и σ^2 являются параметрами и используется план d, есть

$$E_{\mu,\sigma;d} Y = X_d \mu;$$

Δ — множество значений индекса d. δ — вероятностная мера на Δ, т. е. рандомизированный план. Δ_R — рассматриваемый класс рандомизированных планов, R — данная матрица с размерами $2 \times m$ $(2 \leqslant m)$, s_d — наибольшее число линейно независимых линейных комбинаций элементов R_μ, имеющих несмещенные оценки, когда используется план d. t_d — вектор размерности s_d несмещенных оценок компонент $Q_d R_\mu$, имеющих наименьшую дисперсию (когда используется план d; Q_d — матрица с размерами $s_d \times r$, для которой указанные оценки существуют); t_d называется наилучшей линейной оценкой. $\sigma^2 V_d$ — матрица ковариаций для компонент t_d ($\sigma^2 \overline{V}_d$, если $s_d = r$). b_d — ранг X_d. Для каждого критерия Φ_d, связанного с d, $\beta_{\Phi_d}(\mu, \sigma^2)$ является функцией мощности. Для $0 < \alpha < 1$ $H_d(\alpha)$ означает класс всех Φ_d объема α. $F_{d,\alpha}$ обозначает обычный F-критерий для H_0 объема α с s_d и h_d степенями свободы, основанный на отношении $t_d' V_d^{-1} t_d / s_d \overline{S}_d$ (здесь $h_d = N - b_d$, $\overline{S}_d$ — обычная наилучшая несмещенная оценка для σ^2). Предполагается, что μ является решением уравнения $\Gamma\mu = \gamma$, где Γ и γ — известные матрицы с размерами $g \times m$ и $g \times 1$ соответственно. Гипотеза H_0 выбирается в форме $R\mu = 0$, где R — матрица ранга r. Альтернатива H_1 состоит из всех распределений, для которых $R\mu \neq 0$. Выделяются два случая:

$$\text{I. } \psi(\mu) = \sum_{i=1}^{u} \mu_i^2, \; R = R_{\text{I}}$$

и

$$\text{II. } \psi(\mu) = \sum_{i=1}^{u} (\mu_i - \overline{\mu})^2, \; R = R_{\text{II}}.$$

Здесь $\overline{\mu} = \sum_{i=1}^{u} \mu_i / u$, R_{I} и R_{II} — матрицы определенных типов. Отмечается, что легко могут быть проведены некоторые обобщения. Рассматриваются следующие классы оптимальных планов.

M-оптимальность: Для $c > 0$ и $0 < \alpha < 1$, план d^* называется $M_{\alpha,c}$-оптимальным в Δ, если для некоторого $\Phi_{d^*}^*$ в $H_{d^*}(\alpha)$,

$$\inf_{\Gamma_c} \beta_{\Phi^* d^*}(\mu, \sigma^2) = \max_{d \in \Delta} \sup_{\Phi \in H_d(\alpha)} \inf_{\Gamma_c} \beta_\Phi(\mu, \sigma^2), \qquad (1)$$

где Γ_c — множество всех μ, σ^2, для которых $\psi(\mu)/\sigma^2 = c$.

L-оптимальность: План называется L_α-оптимальным в Δ, если для некоторого $\Phi_{d^*}^*$ в $H_{d^*}(\alpha)$,

$$\lim_{c \to 0} [a_{\Phi^*_{d^*}}(c) - \alpha] / [b(c) - \alpha] = 1, \qquad (2)$$

где $a_{\Phi^*_{d^*}}(c)$ и $b(c)$ — соответственно левая и правая части соотношения (1). План называется L-оптимальным в Δ, если он L_α-оптимален в Δ для $0 < \alpha < 1$.

D-оптимальность: План d^* называется D-оптимальным в Δ, если

$$\det \overline{V}_{d^*} = \min_{d \in \Delta'} \det \overline{V}_d,$$

где Δ' — множество d из Δ, для которых $s_d = r$, и если $d^* \in \Delta'$.

E-оптимальность: План d^* называется E-оптимальным в Δ, если

$$\pi(\overline{V}_{d^*}) = \min_{d \in \Delta'} \pi(\overline{V}_d)$$

и если $d^* \in \Delta'$ ($\pi(\overline{V}_d)$ — наибольшее собственное значение $\overline{V}_d$). Приведенные определения распространяются на рандомизированный случай. Приводится пример критерия, локально равномерно более мощного, чем E-оптимальный критерий типа $F_{d,\alpha}$. Доказывается, что для $d \in \Delta'$ и $0 < \alpha < 1$ критерий $F_{d,\alpha}$ имеет тип D. В симметрическом случае показывается, что при $b_d \equiv \text{const}$ для всех $d \in \Delta'$, D-оптимальность и кратность $\overline{V}_{d^*}$ единичной матрице для плана d^* влечет его E-оптимальность и L-оптимальность. Для некоторых схем случайных блоков приводятся D-, E-, L-оптимальные планы. Отмечается, что M-оптимальность трудно проверять даже в простых случаях. Для набора независимых гауссовских случайных величин Y_{ij} с неизвестными средними μ_i $(i = 1, \ldots, u;\ j = 1, \ldots, n_i)$ и дисперсией σ^2, $H_0 : \mu_1 = \ldots = \mu_u = 0$, $\Delta = \{d : n_1, \ldots, n_u, \sum n_i = N\}$, доказывается теорема: Для каждых d, α и c

$$a_{F_{d,\alpha}}(c) \leqslant a_{f_{d,\alpha}}(c);$$

$a'_{f_{d,\alpha}}$ строго убывает в $k(d)$ и то же верно для $a_{f_{d,\alpha}}(c)$ для всех достаточно малых c. Здесь $k(d)$ — число $n_i > 0$; δ_d — план, при котором получающиеся друг из друга перестановкой наборы n_i, составляющих d, выбираются с вероятностью $1/u!$; $f_{d,\alpha}$ — критерий, связанный с δ_d, получающийся из подходящего F-критерия размера α соответствующей рандомизацией; $a_\Phi(c)$ имеет тот же смысл, что и в (2) при $\psi(\mu) = \sum_{i=1}^{u} \mu_i^2$; a'_Φ означает производную по c в нуле. Ана-

логичные теоремы доказываются для некоторых других случаев, в которых также не сохраняется оптимальность при переходе к рандомизированному планированию. П. Я. Савельев

9 В97. Обобщенный частично сбалансированный план. Raut K. C., Das M. N. Generalised partially balanced design, «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1959, **11**, № 1-2, 145—162 (англ.)

Пусть имеются b «блоков» и $v' + v$ «способов обработки», причем i-й способ применяется в j-м блоке n_{ij} раз. Предположим, что $n_{ij} = n \geqslant 0$ при $i = 1, \ldots, v'$; $j = 1, \ldots, b$, а при $i = v' + 1, \ldots, v' + v$ n_{ij} равно либо $S \geqslant 0$, либо $S + p$ ($p \geqslant 0$); и эти комбинации способов и блоков составляют схему частично сбалансированных неполных блоков с v способами и b блоками. Рассмотрим дополнительно b' блоков таких, что частоты f_j для каждого из них одни и те же и могут различаться для разных блоков. Полученный план, включающий $t = v' + v$ способов обработки и $b + b'$ блоков, называется обобщенным частично сбалансированным планом. При $n = S = 1$ и $f_j = 1$, $p = 0$ имеем обычную схему случайных блоков; при $p = 1$, $f_j = n = S = 0$ получаем схему частично сбалансированных неполных блоков в смысле определения Бозе и Нера. Получены системы уравнений для определения эффектов способов обработки и дисперсии их разностей. Рассмотрены некоторые частные случаи и численный пример. Л. Я. Савельев

9 В98. Операторы и перекрестная классификация при r факторах. Bankier J. D. Operators and the r-way crossed classification. «Amer. Math. Monthly», 1960, **67**, № 9, 841—847 (англ.)

Применение дисперсионного анализа в случае перекрестной классификации при действии r факторов обычно приводит к громоздким вычислениям. В статье предлагается операционный подход к возникающим вычислительным задачам, который успешно усваивался студентами. Резюме автора

9 В99. Мультипликативная модель для анализа дисперсии, соответствующая нескольким факторам. Bechhofer Robert E. A multiplicative model for analyzing variances which are affected by several factors. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 290, 245—264 (англ.)

Рассматривается rcN наблюдений x_{ijk} при предположении, что

$$M(x_{ijk} = \mu_{ij}),\ M(x_{ijk} - \mu_{ij})^2 = \sigma_{ij}^2$$

и

$$\sigma^2 = \left(\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{c} \sigma_{ij}^2 \right)^{1/rc}.$$

Равенство $\sigma_{ij}^2 = \sigma^2 \alpha_i \beta_j \gamma_{ij}$, где α_i, β_i и γ_{ij} — известным образом связанные с σ_{ij}^2 положительные параметры, автор называет одномерной мультипликативной моделью для дисперсии. В случае двуфакторного анализа α_i и β_j трактуются как главные эффекты факторов, а γ_{ij} как «взаимодействие» первого порядка. Рассматриваются вопросы использования предложенной модели в факториальном опыте и в экспериментальном планировании. Показывается, что когда переменные имеют нормальное распределение, логарифмическое преобразование дает возможность пользоваться обычной процедурой дисперсионного анализа данных. По аналогии с линейными гипотезами для средних строятся общие мультипликативные гипотезы для дисперсии. Далее мультипликативная модель обобщается на многомерный случай и указывается практическая задача, связанная с оценкой расстояния снарядов, в которой многомерная мультипликативная модель является подходящей. Указываются также некоторые нерешенные статистические задачи, возникающие в связи с рассматриваемой моделью для дисперсии. М. К. Камалов

9 В100. О критериях Вилсона. Ylvisaker N. Donald. On the Wilson tests. «Psychometrika», 1960, **25**, № 3, 297—302 (англ.)

Рассматриваются предложенные Вилсоном критерии для проверки гипотез об отсутствии эффектов по строкам α_i и по столбцам β_j, основанные на использовании эмпирических медиан, и об отсутствии взаимодействия γ_{ij} в простой модели дисперсионного анализа — двусторонней классификации, в которой наблюдаемые величины x_{ij} имеют следующую структуру:

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ij},$$

где e_{ij} имеют некоторое одинаковое распределение. Показывается, что распределение статистики, используемой Вилсоном, не приближается к χ^2-распределению и поэтому выводы на основе критериев Вилсона неверны. М. К. Камалов

9 В101. Графики функции мощности для спецификации числа наблюдений в дисперсионном анализе фиксированных эффектов. Feldt Leonard S., Mahmoud Moharram W. Power function charts for specifying numbers of observations in analyses of variance of fixed effects. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 3, 871—877 (англ.)

В анализе дисперсии испытуемая совокупность делится на k групп по n элементам, каждая группа подвергается действию разных факторов. Для испытания значимости различия эффектов используется F-критерий мощности P с уровнем значимости α. Шаблонный вопрос практика заключается в следующем: каким должно быть n при выбранных k, α, чтобы достичь мощности P_1 против альтернативы H_1. Авторы анализируют существующие таблицы и графики Танга, Лемера, Пирсона — Хартли, Фокса и Дункана и после их критики представляют собственные. Последние строго применимы только для вполне рандомизированных планов; однако с небольшой ошибкой они могут быть использованы и для других случаев. J. Oderfeld

9 В102. О методах анализа данных, разбитых по группам. Greenhouse Samuel W., Geisser Seymour. On methods in the analysis of profile data. «Psychometrika», 1959, **24**, № 2, 95—112 (англ.)

Рассматриваются методы анализа количественных данных, разбитых по группам. Предполагается, что эти данные являются выборкой из многомерной нормальной совокупности с произвольной матрицей ковариации. Указываются задачи, возникающие при таких данных. Основной метод исследования — метод дисперсионного анализа, где применяется критерий F с поправкой к числу степеней свободы его. Разбирается случай, когда ковариационная матрица распределения меняется от группы к группе. Приводится пример для иллюстрации. М. К. Камалов

9 В103. Оценка потерянных и смешанных наблюдений в нескольких экспериментальных планах. Biggers J. D. The estimation of missing and mixed up observations in several experimental designs. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 91—105 (англ.)

Автор указывает, что часто в течение эксперимента теряются несколько единиц наблюдения. Для полного статистического анализа всего наблюдения нужно «вставлять» потерянные наблюдения с таким расчетом, чтобы остаточная сумма квадратов обращалась в минимум. В статье рассматривается задача вычисления потерянных значений для нескольких планов (случайные блоки и др.). Рассматривается также потеря нескольких идентичных данных с известной суммой наблюдений. Этот случай назван случаем «смешанных наблюдений». Приводятся численные примеры для иллюстрации. М. К. Камалов

9 В104. Критерии значимости в каноническом анализе. Lawley D. N. Tests of significance in canonical analysis. «Biometrika», 1959, 46, № 1-2, 59—66 (англ.)

Пусть x_p и x_q — два случайных вектора-столбца с числом измерений p и q соответственно, следующих многомерным нормальным законам с нулевыми средними. При помощи невырожденных линейных преобразований эти вектора можно привести к векторам-столбцам y_p и y_q, удовлетворяющим условиям

$$E\left(y_p y_p'\right) = I_p,\ F\left(Y_q Y_q'\right) = I_q,$$

$$E\left(Y_p Y_q'\right) = P,\ E\left(Y_q Y_p'\right) = P',$$

где I_p и I_q — единичные матрицы порядков p и q соответственно, а P — матрица порядка $p \times q$ с элементами $p_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $p_{ii} = \rho_i$. Величина ρ_i называется i-м каноническим коэффициентом корреляции векторов x_p и x_q. В статье исследуются приближенные распределения и моменты оценок r_i для канонических коэффициентов, в качестве которых берутся квадратные корни от собственных значений матрицы

$$A_{qq}^{-11} A_{qp} A_{pp}^{-1} A_{qp},$$

где A — выборочные корреляционно-дисперсионные матрицы векторов Y_p и Y_q. Обсуждается критерий значимости для гипотезы о равенстве нулю k наименьших канонических коэффициентов корреляции, основанный на приближенных распределениях r_i и улучшается критерий, предложенный Бартлетом в 1938 г.

И. Ф. Красичков

9 В105. Ковариационный анализ, векторные представления. Renier A. L'analyse de la covariance représentations vectorielles. «Ann. Inst. exptl tabac Bergerac», 1959, 3, № 2, 333—370 (франц.; рез. англ.)

Краткий обзор теории линейной регрессии. Изложение ковариационного анализа и его применения к методу наименьших квадратов. Приводится подробная геометрическая иллюстрация рассматриваемых понятий и результатов. Изложение носит элементарный характер.

Л. Я. Савельев

9 В106. Приближенный критерий для коэффициента корреляции при полиномиальной регрессии. McGregor J. R. An approximate test for serial correlation in polynomial regression. «Biometrika», 1960, 47, № 1-2, 111—119 (англ.)

Рассматривается схема линейной регрессии

$$x_s = \xi_{1s}\beta_1 + \xi_{2s}\beta_2 + \ldots + \xi_{ms}\beta_m + \varepsilon_s\ (s = 1, 2, \ldots n),$$

где $(\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, суть ортогональные векторы, ε_s — независимые нормально распределенные $(0, 1)$ величины, а m — фиксированное число. В связи с проверкой гипотезы о независимости ε_s строится оценка

$$r = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n-1} (z_{j+1} - z_j)^2}{2\sum_{j=1}^{n} z_j^2}$$

для коэффициента корреляции величин

$$z_s = x_s - \sum_{i=1}^{m} \xi_{is} \sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} x_k.$$

С помощью метода Даниэльса (РЖМат, 1958, 551) получено приближенное с точностью до $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ выражение для плотности распределения r. Показано, что распределение величины $d = 2 - 2r$ отличается от распределения величины d_u, рассмотренной в работе Дэрбина и Ватсона (Durbin J., Watson G. S., Testing for serial correlation in least squares regression. II. Biometrika, 1951, 38, 159 — 178), на величину порядка $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Приведена таблица, в которой сравниваются значения d и d_u, соответствующие уровням значимости 5% и 1% при различных n.

М. И. Фортус

9 В107. Об отыскании прямолинейной линии регрессии в случае наличия ошибок в определении обеих переменных и некоторые приложения. Hudimoto Hirosi. Note on fitting a straight line when both variables are subject to error and some applications. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1956, 7, № 3, 159—167 (англ.)

Пусть (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, — наблюденные значения случайных величин, $E(x_i) = X_i$, $E(y_i) = Y_i$ — соответствующие математические ожидания, называемые автором истинными значениями, так что ошибки наблюдений есть

$$\varepsilon_i = x_i - X_i,\ \varepsilon_i' = y_i - Y_i.$$

Пусть существует линейная связь между истинными значениями $Y_i = \alpha + \beta X_i$, все ε_i распределены одинаково и некоррелированы, все ε_i' также распределены одинаково и некоррелированы и для $i \neq j$ $E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j') = 0$. Упорядочив выборку так, чтобы $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ и разделив ее на две части объема $m = \frac{N}{2}$ (N предполагается четным), автор в качестве оценки для β берет статистику Вальда $b = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}$, в которой $\bar{x}_1$ и $\bar{y}_1$ — средние, взятые по первой части выборки, а $\bar{x}_2$ и $\bar{y}_2$ — средние, взятые по второй части выборки. С помощью этой статистики решается задача о нахождении оценки вероятности p того, что случайная величина Z, определенная соотношением

$$Z = \begin{cases} 1, \text{ когда } y_i' - (\alpha + \beta X_i') > 0, \\ 0, \text{ когда } y_i' - (\alpha + \beta X_i') < 0, \end{cases}$$

равна 1. А затем предлагается процедура, приводящая к построению доверительного интервала для β, основанная на использовании вероятностей типа p. В заключение рассмотрен численный пример. В. М. Волков

9 В108. Дальнейшее замечание о простом методе для выравнивания экспоненциальной кривой. Patterson H. D. A further note on a simple method for fitting an exponential curve. «Biometrika», 1960, 47, № 1-2, 177—180 (англ.)

Рассматривается кривая регрессии

$$M(y_x) = \alpha - \beta\rho^x,$$

где

$$0 < \rho < 1,\ x = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

и ставится вопрос о выравнивании данных по этой кривой. При использовании способа наименьших квадратов оценка r параметра β вычисляется по формуле

$$r = \frac{\sum_x w_x y_x}{\sum w_x y_{x-1}},\ \sum_x w_x = 0,$$

где w_x — полином степени $3n - 9$. Автор указывает квадратное уравнение для r, коэффициенты которого являются линейными функциями относительно y_x. Когда значение ρ не очень мало и n не очень большое (n может принимать значение до 12), оценка r, являющаяся решением этого квадратного уравнения, находится в хорошем согласии с оценкой для r, получаемой способом наименьших квадратов. Для $x = 0, 1, 2, 4$ эти вопросы детально рассматриваются и приводятся численные примеры.

М. К. Камалов

9 В109. Максимальный коэффициент сопряженности в случае неквадратной таблицы сопряженности. Pawlik K. Der maximale Kontingenzkoeffizient im Falle nichtquadratischer Kontingenztafeln. «Metrika», 1959, 2, № 2, 150—166 (нем.)

Пусть некоторые наблюдения разбиты по некоторым двум признакам на r и k классов соответственно и $r < k$. В работе показано, что соответствующая им прямоугольная $r \times k$-таблица сопряженности $O = \| O_{ij} \|$ имеет коэффициент сопряженности, где O_{ij} — число наблюдений, принадлежащих к i-му классу по первому признаку и к j-му классу по второму

$$\sqrt{1 - 1 \Big/ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}}, \qquad (1)$$

где

$$x_{ij} = O_{ij}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{r} O_{ij} \cdot \sum_{j=1}^{k} O_{ij};$$

максимальное возможное значение этого коэффициента, как в случае квадратной $r \times r$ таблицы, равно $\sqrt{\frac{r-1}{r}}$. В связи с этим автор предлагает ввести в выражение (1) надлежащий корректирующий множитель.

Б. С. Флейшман

9 В110. Средняя ранговая корреляция Спирмана при наличии «ничьих». Curetton Edward E. The average spearman rank criterion correlation when ties are present. «Psychometrika», 1958, **23**, № 3, 271—272 (англ.)

Исследуется вопрос об асимптотической нормальности критерия средней ранговой корреляции Спирмана для m независимых экспериментов в предположении о возможности «ничьих» (т. е. случайного осуществления равенства рангов); при отсутствии такой возможности вопрос уже исследован (Psychometrika, 1952, **17**, 421—428).

Р. Л. Добрушин

9 В111. Подставные величины в корреляционном анализе. Somermeijer W. H. Substituut-veriabelen in correlatieberekingen. «Statist. neerl.», 1957, **11**, № 3, 153—160 (гол.; рез. англ.)

Критически исследуется недавно высказанное утверждение, что в корреляционном анализе может быть без внесения существенных различий использована одна величина x_2 вместо другой x_3 в предположении, что коэффициент корреляции между x_2 и x_3 велик.

Из резюме автора

9 В112. О структуре статистик, не зависящих от распределения. Bell C. B. On the structure of distribution-free statistics. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 3, 703—709 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть Ω и Ω' — классы функций распределения, удовлетворяющие условиям: (α) $\Omega \subset \Omega^*$, где Ω^* — класс непрерывных строго монотонных функций распределения, (β) Ω' замкнут относительно Ω, т. е. $F[G^{-1}(G_1(x))] \in \Omega$, если $F \in \Omega'$, а $G, G_1 \supset \Omega$; (γ) Ω' — симметрически полный класс, т. е. если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ симметрична и $\int_{R^{(n)}} f dF^{(n)} = 0$ при всех $F \in \Omega$, то $f = 0$ почти всюду по $F^{(n)}$ при всех $F \in \Omega'$. Тогда если $S_G(X_1, \ldots, X_n)$ есть симметричная статистика, не зависящая от распределения из Ω в строгом смысле по отношению к Ω' (т. е. при любом $F \in \Omega'$, $G \in \Omega$ распределение вероятностей для $S_G(X_1, \ldots, X_n)$, где X_i имеет распределение F, зависит только от $F(G^{-1}(x))$, то она имеет вид $\Phi(G(X_1), \ldots, G(X_n))$, где Φ — некоторая симметричная функция. Перечисляется ряд классов функций распределения, удовлетворяющих условиям теоремы.

Д. М. Чибисов

9 В113. Распространение теоремы фон Мизеса на некоторые классы распределений в R_k и, более общо, в пространствах Рисса. Barra Jean-René. Extension du théorème de Von Mises à certaines classes de lois de probabilité sur R^k et plus généralement sur un espace de Riesz. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 1, 52—54 (франц.)

В заметке вычисляется асимптотический закон распределения нормированного квадратного уклонения

$$\int [F_n(P) - F(P)]^2 dF(P)$$

многомерной эмпирической функции распределения $F_n(P)$ от теоретической функции $F(P)$. Никаких указаний на методы доказательства нет. Основные утверждения: 1) Случайная функция $\Delta_n(P) = \sqrt{n}[F_n(P) - F(P)]$ асимптотически нормальна с ковариацией

$$\Gamma(P, Q) = F(\min P, Q) - F(P) F(Q),$$

где $\min P, Q = (\min(p_1, q_2), \ldots, \min(p_k, q_k))$; $P = (p_1, \ldots, p_k)$; $Q = (q_1, \ldots, q_k)$. Отсюда заключается, что характеристическая функция величины $\|\Delta_n\|^2$ может быть записана как $[D(2it)]^{-\frac{1}{2}}$, где $D(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)$ — детерминант Фредгольма ядра $\Gamma(P, Q)$. 2) Приводится аналитическое разложение для $D(\lambda)$ и связанных с ней функций. Коэффициенты разложения равны вероятностям некоторых специальных расположений точек, выбираемых по закону $F(P)$. Утверждение 1 было недавно доказано в диссертации А. А. Филипповой, а в частном случае обосновано референтом (РЖМат, 1959, 11338Д).

Н. Н. Ченцов

9 В114. Сравнение между эмпирическим и теоретическим распределениями. II. Со Ын-чон. «Сухак ка мулли, Ж. матем. и физ.», 1959, **3**, № 2, 4—43 (кор.)

Построены точные выражения для распределений статистик

$$D_n(a, b) = \sup_{a \leqslant F(x) \leqslant b} [F_n(x) - F(x)];$$

$$D_n(a) = \sup_{a \leqslant F(x)} [F_n(x) - F(x)],$$

где $F_n(x)$ — эмпирическое распределение; $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения и n случайных величин, имеющих распределение $F(x)$, $0 \leqslant x < b \leqslant 1$. Из точных формул вычисляются первые два члена асимптотического разложения по степеням $n^{-1/2}$ для распределения $D_n(a, b)$ и три члена асимптотики для распределения $D_n(a)$. Предельные распределения статистик известны (Мания Г. М., Докл. АН СССР, 1949, **69**, № 4).

В. С. Королюк

9 В115. Распределения статистик типа Смирнова для сравнения многих выборок при малых объемах выборок. Birnbaum Z. W., Hall R. A. Small sample distributions for multi-sample statistics of the Smirnov type. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 3, 710—720 (англ.)

Пусть $F^{*(i)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, c$ — эмпирические функции распределения c независимых выборок объемов n_i случайных величин с непрерывными функциями распределения $F^{(i)}(x)$. Для распределений статистик

$$D(n_1, n_2, \ldots, n_c) = \sup_{\substack{x, i, j \\ (i, j = 1, 2, \ldots, c)}} |F^{*(i)}(x) - F^{*(j)}(x)|$$

и

$$D^+(n_1, n_2, \ldots, n_c) = \sup_{\substack{x, i, j \\ (i, j = 1, 2, \ldots, c)}} [F^{*(i)}(x) - F^{*(j)}(x)]$$

при нулевой гипотезе $F^{(1)} = F^{(2)} = \ldots = F^{(c)}$ выводятся простые рекуррентные формулы, которые легко могут быть запрограммированы для вычислений на электронной вычислительной машине. Приводятся составленные таким образом шестизначные таблицы: для $P\{D(n, n, n) \leqslant r\}$ при $n = 1(1)20(2)40$ и целых nr таких, что вероятности меняются от 0,90 до 0,995 и

для $P\{D(n,n) \leqslant r\}$ и $P\{D^+(n,n) \leqslant r\}$ при $n = 1(1)40$ и $ur = 0(1)20$. Для $c > 3$ авторы считают более целесообразным, чем составление таблиц, составление программы для вычисления вероятностей в каждом конкретном случае. Кроме того, предлагаются простые неравенства для оценки $P\{D(n,n,\ldots,n) < r\}$ через $P\{D(n,n) \leqslant r\}$ и $P\{D(n,n,n) \leqslant r\}$. Д. М. Чибисов

9 В116. О сравнении двух выборок с малым различием объемов. Reimann J., Vincze I. On the comparison of two samples with slightly different sizes. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1960, **5**, № 3, 293—309 (англ.; рез. русск.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — две серии независимых результатов наблюдений случайной величины и $F_n(x)$ и $G_m(x)$ — эмпирические функции распределения этих серий. Получены точные формулы и предельные распределения для следующих статистик:

$$B^+_{nm} = \max_{(x)} [nF_n(x) - mG_m(x)],$$

$$B_{nm} = \max_{(x)} \left| nF_n(x) - mG_m(x) + \frac{m-n}{2} \right| - \frac{m-n}{2}$$

в предположении, что при $n \to \infty$ $\dfrac{(m-n)^2}{m+n} \to 4c^2$ $(c>0)$.

Получены также точные и предельные совместные распределения указанных статистик и соответствующих моментов первого достижения максимума. Авторы доказывают, что критерии, основанные на статистиках B^+_{nm} и B_{nm}, состоятельные. В. С. Королюк

9 В117. Двухвыборочные критерии в случае многомерных распределений. Weiss Lionel. Two-sample tests for multivariate distributions. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 1, 159—164 (англ.)

Рассматриваются взаимно независимые k-мерные векторы X_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и Y_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Предполагается, что X_i распределены одинаково с плотностью $f(x)$, а Y_j с плотностью $g(x)$. Через $2R_i$ обозначается расстояние между X_i и ближайшим к нему вектором X_l $(i \neq l)$, а через S_i — число элементов выборки Y_j, попавших в сферу радиуса R_i, описанную вокруг X_i. Пусть

$$Q(r) = 2ka \int \frac{f^2 g^r}{[g + 2kaf]^{r+1}}\, dx,$$

где E — k-мерное евклидово пространство, r — натуральное число и $a > 0$. Тогда для любых натуральных чисел s_l и s_j вероятность $P\{S_l = s_l, S_j = s_j\}$ стремится к $Q(s_l)\,Q(s_j)$, а $P\{S_l = s_l\}$ стремится к $Q(s_l)$, когда $m \to \infty$, $m = na$. Отсюда следует, что доля величин s_l, равных r, стремится при $m \to \infty$ к $Q(r)$. Далее показывается, что $Q(0) \geqslant 2ka/(1+2ka)$, причем равенство имеет место только и если только $f(x) = g(x)$ почти всюду. Это позволяет использовать число s_l, равных 0, как критерий проверки гипотезы $f(x) = g(x)$. Обсуждаются свойства такого критерия. М. Г. Шур

9 В118. Совместное сравнение оптимального критерия и критерия знаков для среднего нормальной совокупности. Bahadur R. R. Simultaneous comparison of the optimum and sign tests of a normal mean. «Contribs Probability and Statist.» Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 79—88 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность независимых наблюдений нормальных случайных величин, R_n — число положительных элементов в этой последовательности,

$$MX_i = \mu,\ DX_i = \sigma^2,\ \overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n,$$

$$G(x) = \int_x^\infty (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)\, dt.$$

Для быстрой проверки гипотезы $\mu = 0$ против $\mu > 0$ предлагается последовательно использовать непараметрический критерий знаков и оптимальный критерий. Для этой цели изучаются совместные распределения статистик $\overline{X}_n$ и R_n и соответствующих уровней значимости

$$L_0(n) = G(\sqrt{n}\,\overline{X}_n/\sigma)$$

и

$$L_S(n) = \sum_{r=R_n}^{n} \binom{n}{r} 2^{-n}.$$

Пусть

$$\theta = \frac{\mu}{\sigma},\ q = G(\theta),\ p = 1 - q,$$

$$\tau = 2p^p q^q / \exp(\theta^2/2),$$

$$\varphi = 2\ln(2p^p q^q)/\theta^2,$$

$$\rho = \exp(-\theta^2/2)/\sqrt{2\pi pq},$$

$$\gamma^2 = \theta^2 + pq[\log(p/q)]^2 - 2\theta(pq)^{1/2}[\log(p/q)]\,\rho,$$

$$s_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma,\ T_n = (R_n - np)/\sqrt{npq}.$$

Тогда: 1) Совместное распределение s_n и T_n при $n \to \infty$ сходится к двумерному нормальному распределению со средними 0, дисперсиями 1 и ковариацией ρ. 2) Если $\mu > 0$ и $U_n = (n\gamma^2)^{-1/2} \log[\tau^n L_S(n)/L_0(n)]$, то

$$\lim_{n\to\infty} P(U_n > x) = G(x)$$

и с вероятностью 1

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \{U_n/(2\log\log n)^{1/2}\} =$$

$$= -\overline{\lim_{n\to\infty}} \{U_n/(2\log\log n)^{1/2}\} = 1.$$

3) Для бесконечной последовательности $X_1, X_2, \ldots$ и $\mu > 0$ с вероятностью 1 для всех достаточно малых l $N_0^- \leqslant N_0^+ < N_s^+ \leqslant N_s^-$; $\lim\limits_{l\to 0} N_0^- = \infty$; $\lim\limits_{l\to 0} N_0^-/N_s^+ = \varphi = \lim\limits_{l\to 0} N_0^+/N_s^-$, где $N_\cdot^- = \min(m : L_\cdot(m) \leqslant l)$, $N_\cdot^+ = \min(m : L_\cdot(n) \leqslant l,\ n = m, \ldots, \infty)$ и соответственно $N_\cdot^- = 1$, $N_\cdot^+ = \infty$, если таких m не окажется. Рассмотрен также случай, когда σ оценивается по выборке.

А. А. Боровков

9 В119. Распространение критерия Уилкоксона — Манна-Уитни на выборки, цензурированные в одной и той же фиксированной точке. Halperin Max. Extension of the Wilcoxon — Mann — Whitney test to samples censored at the same fixed point. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 289, 125—138 (англ.)

Имеются две выборки объемов n и m с функциями распределения $F(t)$ и $G(t)$, причем в каждой выборке наблюдаются только значения, не превосходящие фиксированного числа T. Пусть это $x_1, \ldots, x_{n-r_n}$ и $y_1, \ldots, y_{m-r_m}$; r_n x-ов и r_m y-ов превосходят T и не наблюдаются (цензурированы). Для проверки гипотезы $F(t) = G(t)$, $-\infty < t \leqslant T$, предлагается критерий, основанный на статистике U_c, определяемой следующим образом: Пусть $U(n - r_n, m - r_m)$ — обычная статистика Уилкоксона, построенная по наблюденным значениям (число пар (x, y) с $y < x$); тогда $U_c = U(n - r_n, m - r_m) + r_n(m - r_m)$. Гипотеза отвергается, если $U_c \leqslant \overline{U}_c$, где $\overline{U}_c$ определяется из равенства $P\{U_c \leqslant \overline{U}_c\} = \alpha$, причем ве-

роятность вычисляется при условии, что $r_n + r_m = r$. Находится точное распределение статистики U_c. Приводятся таблицы при нулевой гипотезе критических точек для $\alpha = 5\%$, 1%, n, $m \leqslant 8$, $0 \leqslant r \leqslant m + n - 1$. Доказывается состоятельность критерия при альтернативе

$$\frac{F(x)}{F(T)} > \frac{G(x)}{G(T)}, \quad -\infty < x < T, F(T) > G(T),$$

а также асимптотическая нормальность статистики U_c. Для $n = m = 8$ приводится численное сравнение, показывающее, что нормальное приближение является удовлетворительным, если цензурировано не более 75% от общего объема двух выборок. Д. М. Чибисов

9 В120. Некоторые порядковые критерии для k-выборок. Dwass Meyer. Some k sample rank — order tests. «Contribs Probability and Statist.» Stanford, Calif, Univ. Press, 1960, 198—202 (англ.)

Имеется k независимых векторов $X_i = (X_{i1}, \ldots, X_{in_i})$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, компоненты каждого из которых независимы и одинаково распределены. Надо проверить гипотезу H, что все k векторов имеют один и тот же закон распределения. В данной статье предлагаются 2 способа проверки этой гипотезы. Пусть $T(X_i; X_j)$ — некоторая порядковая статистика (т. е. статистика, зависящая от совместного вариационного ряда величин X_{ik}, X_{jl}), используемая для проверки того, что X_i и X_j имеют один и тот же закон распределения, и $T(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_j)$ — та же статистика, только первый вектор составлен из $n_1 + \ldots + n_{j-1}$ компонент, принадлежащих $X_1, \ldots, X_{j-1}$. Первый способ состоит в следующем: принимать H, если только

$$V = \max\{c_2 T(X_1; X_2), \ldots, c_k T(X_1, \ldots, X_{k-1}; X_k)\} < \lambda,$$

где c_i и λ — надлежащим образом выбранные постоянные. Если верна гипотеза H и $T(X_i; X_j)$ не зависит от перестановки компонент в каждом из векторов, то величины, стоящие под знаком максимума в V, независимы. Второй способ: принимать H, если только

$$W = \max_{i,j \in A} c_{ij} T(X_i; X_j) < \lambda,$$

где A — множество пар индексов из $(1, \ldots, k)$, c_{ij} и λ — надлежащим образом выбранные постоянные. Распределение W находить гораздо труднее, чем V. В статье доказана асимптотическая нормальность W в том случае, когда $T(X_i, X_j)$ — статистика Уилкоксона (т. е. T равно числу случаев, когда компонента X_i больше компоненты X_j) и $n_1 = \ldots = n_k = n$. В последнем разделе статьи строится доверительное множество для $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ при предположении, что $X_i - \theta_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ имеют одно и то же распределение. Е. В. Булинская

9 В121. Нулевое распределение двумерного критерия знаков Ходжеса. Klotz Jerome. Null distribution of the Hodges bivariate sign test. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 1029—1033 (англ.)

Ходжесом (РЖМат, 1957, 4234) был введен двумерный критерий знаков и для соответствующей статистики K получено распределение $P(K \leqslant k)$ для значений $k \leqslant n/3$ (n — объем выборки) при нулевой гипотезе. В работе находится полное распределение статистики и приводятся пятизначные таблицы $P(K \leqslant k)$ для всех k при $n = 1$ (1) 30 и для k, дающих значения вероятности от 0 до превосходящих 0, 1, при $n = 31$ (1) 50.

Д. М. Чибисов

9 В122. Некоторые критерии симметрии перестановок. Wormleighton R. Some tests of permutation symmetry. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 1005—1017 (англ.)

Строятся критерии симметричности k-мерного случайного вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ по данным выборки объема n. В качестве нулевой гипотезы симметрии рассматривается гипотеза:

$$P\{x_{i_1} > x_{i_2} > \ldots > x_{i_k}\} = p_{i_1 i_2 \ldots i_k} > 0,$$

где $p_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — заданные числа, сумма которых равна 1. Подробно обсуждается случай, когда все $p_{i_1 i_2 \ldots i_k} = 1/k!$.

В этом случае предложенный автором критерий обобщает критерий Фридмана (Friedman M., J. Amer. Statist. Assoc., 1937, **32**, 675 — 701). Дается предельное распределение рассматриваемого критерия для $n \to \infty$.

В. С. Королюк

9 В123. Одно замечание о так называемом методе Монте-Карло. Suschowk D. Eine Bemerkung zu den sogenanten «Monte Carlo — Methoden». «Mitteilungsbl. math. Statist.», 1957, **9**, № 3, 240—244 (нем.)

В связи с методом Монте-Карло делаются некоторые очевидные замечания о цепях Маркова и статистической оценке некоторых связанных с ними параметров.

А. Х. Заславский

9 В124. Достаточные статистики для класса задач, связанных с бросанием монеты. Narayana T. V., Chorneyko I., Sathe Y. S. Sufficient partitions for a class of coin tossing problems. «Biometr. Z.», 1960, **2**, № 4, 269—275 (англ.)

Рассматривается цепь Маркова из двух состояний X и O с переходными вероятностями $p_{OX} = p_1$, $p_{XX} = p_2$ и начальной вероятностью $p_X = p_1$. «Игра» G_r состоит в проведении испытаний до тех пор, пока впервые число появлений X не превзойдет число появлений O на $r \geqslant 1$. «Игра» A_n состоит в проведении n испытаний. В G_r и A_n строятся достаточные статистики и несмещенные оценки $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ с минимальной дисперсией параметров p_1, p_2. Пусть n, m — числа появлений соответственно O и цепочек OX в G_r;

$$\pi(r, m, n, l) = \binom{n+r-2}{m-1}\binom{n-1}{l-1} - \binom{n+r-2}{m-2}\binom{n-1}{l}.$$

Тогда при условиях $p_1 + p_2 > 1$, $p_1 \neq p_2$ в G_r

$$\hat{p}_1 = \frac{\pi(r, m, n, m-1)}{\pi(r-1, m, n+1, m)}, \quad \hat{p}_2 = \frac{\pi(r-2, m, n+1, m)}{\pi(r-1, m, n+1, m)}.$$

В A_n при условии $p_1 \neq p_2$ $\hat{p}_1 = \frac{k}{n-r}$, если $r < n$ и $\hat{p}_1 = 1$, если $r = n$. Здесь r, k — числа появлений X и цепочек XO соответственно. Несмещенные оценки для p_2 в A_n, вообще говоря, не существуют.

А. А. Боровков

9 В125. Анализ скачков. Jowett G. H., Wright Wendy M. Jump analysis. «Biometrika», 1959, **46**, № 3-4, 386—399 (англ.)

kn наблюдений над процессом $x(t)$, проводимые в моменты $(t = 1, 2, \ldots, kn)$, разбиты по порядку на k групп по n наблюдений в каждой.

$$x[(s-1)n + u] = \mu_s + \xi[(s-1)n + u]; \quad s = 1, 2, \ldots, k,$$

$\xi(t)$ — гауссовский стационарный процесс. Проверяется нуль-гипотеза $\mu_s = \text{const}$; дисперсионный метод, использующий сравнение средних значений процесса $x(t)$ в разных группах, требует знания корреляционных свойств на участках длины большей, чем длина группы n. Авторы предлагают для проверки нуль-гипотезы статистику

$$B_\alpha = \frac{1}{k-1}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{1}{2}\left[\bar{x}_\alpha\left(sn + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right) - \bar{x}_\alpha\left(sn + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right)\right]^2,$$

$$\alpha \leqslant \frac{1}{2} n, \quad \overline{x}_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\tau=\left[t-\frac{\alpha}{2}\right]}^{\left[t+\frac{\alpha}{2}\right]} x(\tau),$$

дисперсия которой может быть оценена без знания корреляционных свойств на больших участках. Более подробно рассмотрен случай, когда $\xi(t)$ является марковским процессом с корреляционной функцией $\sigma^2 \rho^{|\tau|}$; приведены относящиеся к этому случаю таблицы значений k, ΔB_α при $n=12$ и различных α и ρ. А. М. Каган

9 В126. Оценка параметра марковского дискретного процесса. Trong Lieu Bui. Estimation dans les processus de Markov discrets. «C. r. Acad. sci.», 1960, **251**, № 14, 1339—1340 (франц.)

Рассматривается однородный марковский дискретный процесс, определенный для $t = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ — пространство состояний, $P(x, A)$, где $x \in \mathfrak{X}$, $A \in \mathfrak{B}$ — вероятность перехода из x в A. Пусть, далее, μ — мера на $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$; $p(x, y)$ — плотность $P(x, A)$ относительно μ; $\Pi_0(y) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(x, y)$ почти наверное в смысле меры μ. Предположим, что Π_0 и p зависят от параметра θ, истинное значение которого равно θ_0. При некоторых дополнительных предположениях доказывается, что: уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log \Pi_0(x_0, \theta) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial\theta} \log p(x_i, x_{i+1}, \theta) = 0,$$

(где x_i — состояние для случайной функции X_t в моменты $t = 0, 1, \ldots, n$) относительно θ имеет простой корень при $n \geqslant N$, где N — случайная величина. Этот корень, который мы будем обозначать через $\tilde{\theta}$, стремится к θ_0 при $n \to \infty$; Случайная величина $\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta)$ при $n \to \infty$ имеет асимптотически гауссовское распределение со средним значением, равным нулю. Оценка является асимптотически эффективной.

Б. А. Власюк

9 В127. Нижние границы для ожидаемого объема выборки и средний риск последовательной процедуры. Hoeffding Wassily. Lower bounds for the expected sample size and the average risk of a sequential procedure. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 2, 352—368 (англ.)

При незнании наименьшего объема выборки, достижимого при наилучшей последовательной процедуре (при данных: гипотезе, сложной альтернативе, вероятностях ошибки и истинном значении параметра), ожидаемый объем выборки для заданной процедуры можно сравнивать с подходящей нижней границей для этого минимума. В разделах 1—6 автор приводит при некоторых условиях две новые нижние границы. Рассматриваются условия достижимости или приближенной достижимости этого минимума. В разделе 7, используя рекуррентную формулу для среднего риска (ожидаемые потери плюс ожидаемая стоимость последовательной процедуры), автор выводит последовательность все более и более лучших нижних границ, которая при некоторых условиях сходится к минимальному среднему риску. Стоимость одного наблюдения может зависеть от параметра. В разделе 8 автор исследует, как использовать эти границы для получения последовательности все более и более лучших нижних границ.

K. Sarkadi—E. Vas

9 В128. Замечание о предельной относительной эффективности вальдовского последовательного критерия по отношению вероятностей. Bechhofer Robert. A note on the limiting relative efficiency of the Wald sequential probability ratio test. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 292, 660—663 (англ.)

Имеем нормальное распределение с неизвестным средним θ и известной дисперсией σ^2; проверяем гипотезу $\theta = \theta_0$ против альтернативы $\theta = \theta_1$. Критерий должен иметь вероятность ошибки 1-го рода $\leqslant \alpha$, вероятность ошибки 2-го рода $\leqslant \beta$. Для $\alpha \to 0$, $\beta = a\alpha^b$ ($a > 0$, $b > 0$) вычислена предельная эффективность вальдовского критерия относительно наилучшего последовательного критерия в зависимости от θ (эффектом перескока границы автор пренебрегает). Предельная эффективность определяется как предел отношения средних значений числа испытаний. А. М. Каган

9 В129. О некоторых свойствах последовательного t-критерия. Chosh Jayanta. On some properties of sequential t-test. «Calcutta Statist. Assoc. Bull.», 1960, **9**, № 35, 77—86 (англ.)

Пусть $\{x_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных нормальных случайных величин с неизвестным средним θ и неизвестной дисперсией σ^2. Проверяется гипотеза H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $(\theta - \theta_0)/\sigma \geqslant \delta$. $C_{\alpha,\beta}$ — класс критериев со средней ошибкой первого рода α и средней ошибкой второго рода β, где усреднение берется по весовым функциям, определенным на областях $\theta = \theta_0$ и $(\theta - \theta_0)/\sigma \geqslant \delta$. Доказывается, что последовательный t-критерий T Вальда обладает двойным минимаксным свойством, т. е.

$$\sup_{\theta=\theta_0} \alpha_T(\theta, \delta) \leqslant \sup_{\theta=\theta_0} \alpha_{T'}(\theta, \sigma)$$

$$\sup_{(\theta-\theta_0)/\sigma\geqslant\delta} \beta_T \leqslant \sup_{(\theta-\theta_0)/\sigma\geqslant\delta} \beta_{T'}(\theta, \sigma),$$

где

$$T' \in C_{\alpha,\beta}.$$

Двойное минимаксное свойство сохраняется в случае двухсторонней альтернативы H_1: $|\theta - \theta_0|/\sigma = \delta$ для соответствующего последовательного критерия. При H_1: $|\theta - \theta_0|/\sigma \geqslant \delta$ для сохранения двойного минимаксного свойства требуется предположение (W): $\beta_T(\Delta)$ есть возрастающая функция $\Delta = |\theta - \theta_0|/\sigma$, вопрос о выполнении которого остается открытым.

О. М. Калинин

9 В130 К. Введение в математическую статистику. Brunk H. D. An introduction to mathematical statistics. Boston, Ginn, 1960, xi, 403 pp., ill., 7.00 doll. «Publishers Weekly», 1960, **177**, № 16, 59 (англ.)

Компактно оформленное руководство по основам математической статистики, рассчитанное на читателя-прикладника. Автор сочетает живость изложения, основанного большей частью на интуиции читателя, со сравнительно строгими формулировками важных понятий и теорем, что не позволяет вниманию растворяться в большом количестве примеров и задач, некоторые из которых весьма любопытны. Не вводя понятия меры, автор ограничивается только дискретными и непрерывными распределениями, так что предполагаются знания, не выходящие за пределы элементарного курса анализа. Книга содержит очерк таких характерных для современной математической статистики направлений, как непараметрические методы и теория решающих функций, изложение которых автор весьма успешно проводит на наглядных примерах.

Содержание. 1. Элементарные вероятностные пространства. 2. Общие вероятностные пространства. 3. Случайные величины. 4. Векторные случайные величины. 5. Алгебра математических ожиданий. 6. Случайный выбор. 7. Закон больших чисел. 8. Оценка параметров. 9. Центральная предельная теорема. 10. Доверительные интервалы и проверка гипотез. 11. Статистическая теория решений. 12. Регрессия. 13. Выборки из нормальной совокупности. 14. Проверка гипотез. 15. План экспериментов и дисперсионный анализ. 16. Другие методы выбора. 17. Непараметрические методы. В конце книги приведены таблицы (всего 12) распределений: биномиального, Пуас-

сона, нормального, Стьюдента и Фишера, а также таблица случайных чисел и некоторых функций, применяемых в статистике. В общем это умело написанная книга, которая дает хотя и первое, но тем не менее широкое представление о математической статистике в целом.

И. Ф. Красичков

9 В131 К. Введение в многомерный статистический анализ. Anderson T. W. An introduction to multivariate statistical analysis. New York, John Wiley & Sons, Inc. London, Chapman and Hall, Ltd. 1958, xii 374 pp., ill. (англ.)

Автор рассматривает статистический анализ, основанный только на многомерном нормальном распределении. В вводной гл. 1 он классифицирует статистические методы многомерного анализа на пять категорий: 1) корреляция, 2) аналоги одномерных статистических методов, 3) задачи выбора системы координат, 4) специальные задачи, 5) зависимые наблюдения. В гл. 2 определяется многомерное нормальное распределение и рассматриваются его свойства. В гл. 3 исследуются оценки максимального правдоподобия вектора средних и ковариационной матрицы, а также распределение вектора выборочных средних. В гл. 4 изучаются различные выборочные коэффициенты корреляции. Обобщенная T^2-статистика Хотеллинга (представляющая обобщение t-статистики Стьюдента) составляет содержание гл. 5. В гл. 6, посвященной классификации наблюдений, рассматривается общая задача статистического вывода с особым выделением круга вопросов, связанных с наблюдениями из многомерных нормальных совокупностей. Распределение Вишарта, обобщенная дисперсия и родственные с ними вопросы излагаются в гл. 7. В гл. 8 об общих линейных гипотезах производится распространение метода наименьших квадратов, регрессионного и дисперсионного анализа. В гл. 9 изучаются критерии независимости групп случайных величин. Задачи, связанные с однородностью (равенством) ковариационных матриц и векторов средних, рассматриваются в гл. 10. Главные компоненты, линейные комбинации случайных величин, которые имеют специальные дисперсионные свойства, изучаются в гл. 11. Канонические корреляции — корреляции между линейными комбинациями случайных величин — составляют предмет изложения гл. 12. Распределения некоторых характеристических корней (корней детерминантных уравнений), которые возникают во многих инвариантных критериях, рассматриваются в гл. 13. Гл. 14 содержит краткое перечисление некоторых современных вопросов многомерного анализа. Добавление содержит 19 стр. теории матриц и библиографию, занимающую 17 стр. Гл. 2, 3 и 4 можно отнести в первую из вышеупомянутых категорий; гл. 5, 6, 7, 8 и 10—во вторую; гл. 11, 12 и 13— в третью, гл. 9— в четвертую и наконец гл. 14 вкратце затрагивает некоторые задачи из всех упомянутых категорий. Едва ли нужно отмечать, что в тексте широко используется матричная алгебра. Автор великолепно справился с задачей написания книги, которая представляет не только введение во многие вопросы многомерного анализа для начинающих, но и ценный справочник для статистиков. Формат книги и ее оформление очень хорошие. В изложении попадаются несколько неточностей и опечаток, которые могут оскорбить формалиста. Книга представляет ценный вклад в литературу по математической статистике.

S. Kullback

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 9, 922

9 В132 К. Курс теоретической и прикладной статистики. Случайный анализ — случайная алгебра. Dugué Daniel. Traité de statistique théorique et appliquée. Analyse aléatoire—algèbre aléatoire. Paris, Masson et Cie, 1958, 313 p. (франц.)

Книга написана на основе лекционных курсов, много лет читавшихся автором в Париже. Формально от читателя требуется знание анализа, основных понятий теории функций комплексного переменного, некоторых простейших фактов из теории меры в n-мерном пространстве и начальных сведений из теории полей; по существу желательно также знакомство с элементарным курсом теории вероятностей. Книга состоит из двух частей: «Случайный анализ» и «Случайная алгебра».

В первой части собраны различные недавние результаты, позволяющие, по мнению автора, рассматривать теорию вероятностей как обобщение обычного анализа. Большое внимание уделено связям между различными видами сходимости случайных величин, поведением максимума одинаково распределенных независимых случайных величин, обобщению на случайные функции известных теорем о непрерывных функциях. Многие результаты принадлежат здесь автору. Излагаются и некоторые другие вопросы, часто отсутствующие в учебниках теории вероятностей или приводимые там без доказательств (закон повторного логарифма, предельный закон Колмогорова — Смирнова, теория оценок и др.).

Вторая часть в основном посвящена дисперсионному анализу и связанным с ним вопросам, имеющим значение в статистических приложениях. Особняком стоит лишь первая глава, где рассматривается вопрос о разложении некоторых законов распределения на независимые компоненты. Изложение на протяжении всей книги очень четкое, доказательства приводятся во всех деталях.

Содержание книги по главам: Случайный анализ. В гл. 1 понятие случайной величины вводится с помощью функций распределения, без пространства элементарных исходов. Наряду с медианой, квартилями, коэффициентом корреляции, моментами и другими обычными понятиями вводится также функция концентрации, предложенная Леви. Доказывается, что функция концентрации суммы независимых слагаемых не превосходит функции концентрации каждого слагаемого. Дается принадлежащее Ки — Фан определение расстояния между случайными величинами:

$$d(0, X) = \inf\{x : x > 0,\ P(|X| > x) < x\},$$

$$d(Y, X) = d(0, X - Y).$$

Далее вводятся характеристические функции, устанавливается многомерная формула обращения и доказывается ряд теорем, связывающих дифференцируемость характеристической функции и ее действительной части с существованием моментов случайной величины. В гл. 2 рассматриваются различные виды сходимости случайных величин: по распределению, по вероятности, почти наверное, почти вполне наверное (последовательность $X_1, X_2, \ldots$ сходится к X почти вполне наверное, если любая последовательность случайных величин $\{Y_n\}$, имеющих те же одномерные распределения, что и $X_n - X$, сходится к 0 почти наверное). Доказывается, что любое бесконечное множество функций распределения компактно (в смысле обычной сходимости функций) и что в случае сходимости по распределению к непрерывному предельному закону функции распределения сходятся равномерно. Устанавливается связь между сходимостью по распределению и сходимостью характеристических функций (в усиленной форме, принадлежащей автору: для сходимости законов распределения $F_n(x)$ к предельному закону достаточно, чтобы их характеристические функции $\varphi_n(t)$ стремились к пределу $\varphi(t)$, действительная часть которого непрерывна в нуле). Далее доказываются две теоремы Слуцкого (1. Из последовательности случайных величин, сходящихся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти вполне наверное. 2) Для сходимости по вероятности справедлив критерий Коши). Затем проверяется, что вводимое в гл. 1 расстояние приводит к сходимости по вероятности, и доказывается, что эту сходимость нельзя ввести с помощью нормы (результат автора). Доказывается также теорема автора и Томасяна о том, что если в множестве A случайных величин сходимости

по вероятности и почти наверное не эквивалентны, то в этом множестве нельзя ввести сходимость почти наверное с помощью инвариантного относительно сдвига расстояния $[d(X+Z, Y+Z) = d(X, Y)]$, даже если отказаться от неравенства треугольника. В гл. 3 выводится ряд неравенств: неравенство Бьенеме — Чебышева (для момента произвольного порядка n), неравенство Колмогорова для нарастающих сумм независимых случайных величин с конечными дисперсиями и аналогичное ему неравенство Леви с функциями концентрации. Кроме того, в гл. 3 доказываются теоремы о том, что существование момента

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p dF(x) \quad (p > 0)$$

эквивалентно сходимости рядов

$$\sum n^{p-1} [1 - F(n) + F(-n)]$$

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}} \int_{-n}^{n} |x|^{p+\alpha} dF(x) \quad (\alpha > 0).$$

В гл. 4 исследуется поведение максимума M_n и минимума m_n из n независимых случайных величин с функцией распределения $F(x)$ и их суммы S_n при $n \to \infty$. Выводятся необходимые и достаточные условия для сходимости M_n/n и m_n/n к нулю по вероятности, почти вполне наверное и вполне наверное (в первом случае — стремление $x[1 - F(x) + F(-x)]$ к 0 при $x \to \infty$, во втором — сходимость интеграла $\int x^2 dF(x)$; в третьем — сходимость интеграла $\int |x| dF(x)$). Далее доказывается теорема Дюге о том, что S_n/n сходится по вероятности, почти наверное или почти вполне наверное к неслучайному пределу тогда и только тогда, когда M_n/n и m_n/n оба сходятся в том же смысле к нулю. Затем рассматриваются различные варианты закона больших чисел, в том числе необходимые и достаточные условия сходимости S_n/n к неслучайному пределу a по вероятности, почти вполне наверное и почти наверное (в первом случае)

$$\lim_{x \to \infty} x[1 - F(x) + F(-x)] = 0$$

и

$$\lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} x dF(x) = a$$

(теорема Хинчина), во втором — существование конечной дисперсии (теорема Хсу, Роббинса и Эрдеша), в третьем — конечность $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x)$ (теорема Колмогорова).

Доказывается также теорема Колмогорова о том, что если $T_1, T_2, \ldots$ независимы, их математические ожидания равны 0 и ряд $\sum \frac{\sigma_n^2}{n}$ сходится (σ_n^2 — дисперсия T_n), то

$$\frac{T_1 + \ldots + T_n}{n}$$

почти наверное сходится к 0. Наконец, доказывается теорема Леви о том, что в случае ряда из независимых случайных величин сходимости по вероятности и почти наверное эквивалентны. В первой части гл. 5 доказывается закон повторного логарифма для схемы Бернулли. Во второй части методом, предложенным Феллером, выводится предельный закон Колмогорова — Смирнова для $\sqrt{n} D_n$, где $D_n = \sup_x |H_n(x) - F(x)|$, $H_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по n наблюдениям случайной величины с непрерывной функцией распределения $F(x)$, а также предельный закон для

$$\sqrt{n} D_n^+ = \sup_x (H_n(x) - F(x)).$$

В гл. 6 сперва доказывается теорема Слуцкого о том, что случайная функция, непрерывная по вероятности в каждой точке замкнутого интервала, равномерно непрерывна (по вероятности) на этом интервале, и теорема об ограниченности по распределению случайной функции, непрерывной по распределению на замкнутом интервале. Затем на двух страницах дается понятие о различных типах случайных функций (стационарных марковских, с независимыми приращениями, гауссовских). В конце главы доказывается принадлежащий Ки-Фан и усиленный автором аналог теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами (если $X(t)$ непрерывна по вероятности на $[0,1]$, то существует последовательность полиномов $P_n(t)$ со случайными коэффициентами, равномерно сходящаяся по вероятности к $X(t)$). В гл. излагается теория оценок. Вначале вводится оценка максимального правдоподобия и доказывается, что при некоторых условиях регулярности она почти наверное сходится к истинному значению параметра. Формулируются также условия, при которых имеет место сходимость по вероятности и почти вполне наверное. Затем доказывается асимптотическая нормальность этой оценки (и для многомерного случая). Далее вводится понятие эффективности оценки и доказывается неравенство Крамера — Рао, а также его обобщение на случай нескольких параметров; доказывается теорема Фишера о коэффициенте корреляции двух оценок, из которых одна оптимальная. Затем определяются достаточные оценки и получается результат Дармуа о том, что достаточная оценка параметра Θ существует лишь тогда, когда плотность распределения имеет вид:

$$p(x, \theta) = f(\theta)[u(x)]^{g(\theta)} V(x).$$

Случайная алгебра. В гл. 1 с помощью аналитических свойств характеристических функций доказывается, что если случайная величина распределена нормально или по закону Пуассона и она разложена в сумму независимых слагаемых, то слагаемые тоже распределены соответственно нормально или по закону Пуассона (теоремы Леви — Крамера и Райкова). Доказывается также, что если среднее арифметическое любого числа независимых величин имеет тот же закон распределения, что каждое слагаемое, то слагаемые распределены по закону Коши. Получается также следующий результат Марцинкевича: функция $e^{P(t)}$, $P(t)$ — многочлен, является характеристической только если степень $P(t)$ не превосходит 2. В гл. 2 рассматриваются употребляемые в статистике законы распределения, связанные с нормальным распределением. Вводятся распределение χ^2, законы Стьюдента и Фишера и вычисляются их плотности. Далее проверяется, что статистики

$$m = \sum x_i/n \quad \text{и} \quad s = \sum (x_i - m)^2/n$$

независимы в случае нормального распределения, и доказывается обратная теорема (если m и s независимы и существует второй момент, то выборка производится из нормального распределения; для $n=2$ этот результат принадлежит Бернштейну). Затем подробно рассматривается многомерное нормальное распределение; вводятся матричные обозначения, определяются многомерная характеристическая функция, многомерный аналог закона χ^2, дисперсия Уилкса. Находится распределение матрицы эмпирических вторых центральных моментов (распределение Вишарта — Бартлетта). Аналогом распределения Стьюдента в многомерном случае служит распределение Хотеллинга. Далее выводится закон Фишера для

эмпирического коэффициента корреляции и находится распределение эмпирического коэффициента регрессии. В гл. 3 подробно рассматриваются различные случаи дисперсионного анализа: 1) простая группировка величин (т. е. по одному фактору) с разным числом наблюдений в группах, 2) сложная группировка величин с одним наблюдением в каждой группе, 3) двойная группировка с разным числом наблюдений в группах, 4) отсутствие взаимодействия между разными факторами. Гл. 4 посвящена латинским квадратам. Определяются латинский квадрат и ортогональность латинских квадратов. Рассматривается вопрос построения ортогональных систем латинских квадратов. Исходя из примитивного элемента конечного поля (поля Галуа) порядка n, легко построить $n-1$ ортогональных латинских квадратов порядка n. В связи с этим с полными доказательствами излагаются некоторые элементы теории полей Галуа. Дается также способ построения попарно ортогональных латинских квадратов порядка

$$n = p_1^{e_1}, \ldots, p_k^{e_k}$$

($p_1, \ldots, p_k$ — простые) в числе, равном минимуму из

$$p_1^{e_1} - 1, \ldots, p_k^{e_k} - 1.$$

В гл. 5 рассматриваются неполные сбалансированные блоки, также позволяющие сокращать число наблюдений при дисперсионном анализе. После рассмотрения схемы дисперсионного анализа для таких планов автор переходит к задаче построения неполных сбалансированных блоков. Даются способы построения новых блоков по данным блокам (дополнительные блоки, производные блоки и остаточные блоки). Затем доказываются неравенства Фишера: если $v > k$, то $b \geqslant v$, и теорема Шутценбергера: если $b = v$ — четное, то $r - \lambda$ является точным квадратом. Далее описывается метод построения блоков с помощью проективного либо евклидова n-мерного пространства над полем Галуа (точки пространства соответствуют способам обработки, n-мерные гиперплоскости — блокам) и некоторые другие алгебраические методы. Гл. 6 посвящена обобщению неполных сбалансированных блоков на случай нескольких признаков. Автор ограничивается здесь разбором примера. А. А. Юшкевич

9 В133 К. Таблицы для вычисления надежности различия координат. Schmidt Hans. Tafel zur Sicherungsberechnung der Koordinatenunterschiede. Neue Teilg. Bearb. Hamburg, Hanseat. Verl. Anst., 1959, 2 Bl., 2. 40 DM. «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1959, **A**, № 45, 3338 (нем.)

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Редактор *Н. Н. Воробьев*

9 В134. Выигрывающие множества. Volkmann Bodo. Gewinnmengen «Arch. Math.», 1959, **10**, № 2-3, 235—240 (нем.)

Рассматривается бесконечная антагонистическая игра, которая состоит в следующем (подробности и литературные указания см. РЖМат, 1958, 8035): интервал (0, 1) разбивается на два множества M_1 и M_2 ($M_1 \cup M_2 = (0, 1)$. Игроки поочередно выбирают интервалы в (0, 1) i_n так, что $i_{n+1} \leqslant i_n$. Пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} i_n$, если оно сводится к одной точке γ, называется граничным значением игры. Выигрывает первый или второй игрок в зависимости от того, принадлежит ли γ множеству M_1 или M_2. Множество $M \subset (0, 1)$ называется выигрывающим, если при надлежащей стратегии всегда выигрывает тот игрок, которому соответствует это множество. В работе изучается топологическая структура выигрывающих множеств. Без особых трудностей результаты переносятся на k-мерные множества точек евклидова пространства. В. С. Королюк

9 В135. Определения для теории игр и погони. Steinhaus H. Definitions for a theory of games and pursuit. «Naval Res. Logist. Quart.», 1960, **7**, № 2, 105—108 (англ.)

Перевод статьи, впервые опубликованной в 1925 г. (Mýsl Akademicka, Lwów, 1925, **1**, № 1, 13-14). Формулируется принцип минимакса для игр типа шахмат и типа погони. Прилагается письмо Г. Штейнгауза редактору журнала, в котором перечисляется ряд полученных им и не опубликованных материалов, в том числе теория игры в «баккара». И. В. Романовский

9 В136. Симметричная непрерывная модель покера. Goldman A. J., Stone J. J. A symmetric continuous poker model. «J. Res. Nat. Bur. Standards», 1960, **B64**, № 1, 35—40 (англ.)

Два игрока ставят в банк по 1, после чего каждый из них получает «карту» — реализацию случайной величины, распределенной равномерно на [0, 1]. Зная свою карту, игрок либо пасует, либо увеличивает ставку до b или до a ($a > b > 1$). Если оба игрока спасовали, то выигрыш каждого 0. Если отказался только один, то другой забирает банк. Если ставки игроков не равны, то игрок, поставивший меньше, должен уравнять ставки или пасовать. При игре с равными ставками банк забирает игрок с большей картой. Оптимальной стратегией каждого игрока является следующая: при карте $z \leqslant (b-1)/b$ отказываться от игры; при $(b-1)/b \leqslant z < (a-1)/a$ с вероятностью $a/(a+b)$ ставить меньшую ставку и ставок не уравнивать и с вероятностью $b/(a+b)$ ставить большую ставку; при карте $z \geqslant (a-1)/a$ ставить бо́льшую ставку. В оптимальной стратегии не следует использовать возможность уравнивания ставок.

И. В. Романовский

9 В137. Конечные бескоалиционные игры. Vorobiev N. N. Jocuri finite fără coaliţie. «An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz.», 1960, **14**, № 1, 20—57 (рум.)

Перевод статьи РЖМат, 1960, 8018.

9 В138. Конечные бескоалиционные игры. Vorobjov N. N. Véges, koalíciómentes, játékok. «Magyar tud. akad. Mat. es fiz. tud. oszt. közl.», 1960, **10**, № 2, 211—250 (венг.)

См. РЖМат, 1960, 8018.

9 В139. Тактические игры с применением счетно-решающих устройств — две задачи. Jansson Birger. Krigsspel på matematikmaskin — två arméproblem. «Militärtekn. tidskr.», 1960, **29**, № 3, 13—14, 17—23 (шведск.)

9В 140. Приближение к байесовскому риску в повторяемой игре. Hannan James. Approximation to Bayes risk in repeated play. «Ann. Math. Studies», 1957, № 39, 97—139 (англ.)

9 В141. Алгорифм для решения одной обобщенной задачи линейного программирования. Зуховицкий С. И. «Докл. АН СССР», 1960, **133**, № 1, 20—23

Для решения общей задачи линейного программирования предложен конечный алгорифм, использованный автором ранее для решения задачи чебышевского приближения функций полиномами (Докл. АН СССР, 1951, **79**, № 4). Л. И. Горьков

9 В142. Связь между оценками погрешности при решении систем линейных уравнений и линейным программированием. Bertram G. Beziehungen zwischen Defektabschätzungen und Linear programming bei linearen Gleichungssystemen. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 7-8, 373 (нем.)

Рассматривается линейная система $Ax = r$. Пусть x_0 — ее точное решение, y — приближенное решение, $d = Ay - r$. Представим x_0 в виде $x_0 = y + \| x_0 - y \| z_0$, где $z_0 = (x_0 - y)/\| x_0 - y \|$, а под $\| x \|$ понимается $\max_{1 \leqslant j \leqslant n} | x_j |$. Подставляя x_0 в исходную систему, получаем $\| x_0 - y \| = \| d \| / \| Az_0 \| \leqslant \| d \| / N$, где

$$N = \min_{\|z\|=1} \| Az \| = \min_{\|z\|=1} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} | (Az)_j | .$$

Будем полагать каждую компоненту z поочередно равной ± 1, оставляя остальные без изменения (это можно сделать $2n$ способами). Из остальных компонент z образуем вектор u. Имеем $Az = Cu - t$, где C есть $(n \times n-1)$-матрица, t — n-вектор. Для такого выбора положим

$$v_n = \min_{|u_l| \leqslant 1} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} | (Cu - t)_j |$$

$$(l = 1, \ldots, n-1).$$

Задача сводится к минимизации v_n при условиях

$$0 \leqslant \left| \sum_{l=1}^{n-1} c_{jl} v_l - q_j \right| \leqslant v_n,$$

где $$q_j = \sum_{l=1}^{n-1} c_{jl} + t_j.$$

Решая все получаемые таким образом $2n$ задач линейного программирования, берем $N = \min_p v_n^p$ $(p = 1, \ldots, 2n)$. Этот метод может давать более точные оценки, чем известные методы, однако он весьма трудоемок. Приведен небольшой пример. А. А. Корбут

9 В143. Эквивалентность двух экстремальных проблем. Kiefer J., Wolfowitz J. The equivalence of two extremum problems. «Canad. J. Math.», 1960, 12, № 3, 363—366 (англ.)

Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — линейно независимые функции, заданные на X, причем область их значений есть компактное подмножество k-мерного евклидова пространства. Пусть C — класс вероятностей мер на X, включающий все вероятностные меры с конечным носителем. Положим $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$ ($f'(x)$ — соответствующий вектор столбец),

$$M(\xi) = \int_X f'(x) f(x) \xi(dx),$$

и в случае несингулярности $M(\xi)$

$$d(x; \xi) = f(x) M(\xi)^{-1} f'(x).$$

Доказывается эквивалентность следующих задач: 1) Найти ξ, максимизирующее $| M(\xi) |$. 2) Найти ξ, минимизирующее $\max_x d(x; \xi)$. 3) Найти ξ, удовлетворяющее условию $\max_x d(x; \xi) = k$. При этом $M(\xi)$ одинаково для всех решений этих задач. Если функция f непрерывна, а пространство X компактно, то существует такая вероятностная мера ξ и такое линейное преобразование $g_i = \sum_j a_{ij} f_j$, что функции g_i ортонормальны относительно меры ξ и

$$\max_x \sum_{i=1}^{k} g_i^2(x) = k.$$

Указываются обобщения и статистические приложения результатов. И. В. Романовский

9 В144. Замечания о таблицах с данными маргинальными значениями и ограничениями. Fréchet M. Sur les tableaux dont les marges et des bornes sont données. «Rev. Inst. internat. statist.», 1960, 28, № 1-2, 10—32 (франц.; рез. англ.)

Имеется прямоугольная таблица с элементами n_{ij}, $i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$. Пусть

$$N_i = \sum_j n_{ij}, \quad N'_j = \sum_i n_{ij}.$$

Решается следующая задача: найти все таблицы с данными маргинальными значениями N_i и N'_j и удовлетворяющие неравенствам $n_{ij} \leqslant m_{ij}$, где m_{ij} — данные числа. Доказывается, что достаточным условием решения этой задачи является следующее

$$\sum_{i<I} \sum_{j<J} m_{ij} \geqslant N_{i_1} + \ldots + N_{i_\alpha} + N'_{j_1} + \ldots + N'_{j_\beta} - N,$$

где $N = \sum_j N'_j = \sum_i N_i$ и каковы бы ни были множества $I = \{i_1, \ldots, i_\alpha\}$ и $J = \{j_1, \ldots, j_\beta\}$ значений i и j. Указывается способ нахождения всех решений.

Е. Б. Яновская

9 В145. Линейные приближения на переплетении. Aumann Georg. Lineare Approximationen auf einem Geflecht. «Arch. Math.», 1959, 10, № 4, 267—272 (нем.)

Переплетением (Geflecht) называется конечное множество M, на котором заданы два разбиения $M = \bigcup A_i$, $M = \bigcup B_j$ такие, что 1) каждое из множеств A_i, B_j содержит не менее двух точек; 2) каждое из множеств $A_i \cap B_j$ содержит не более одной точки. Пусть $a_i(p)$ и $b_j(p)$ — характеристические функции A_i и B_j, Φ — множество их линейных комбинаций $\varphi = \sum x_i a_i + \sum y_j b_j$, f — заданная функция на M. Задача заключается в построении наилучшего приближения φ, дающего

$$\inf_{\varphi \in \Phi} \| f - \varphi \| = \inf_{\varphi \in \Phi} \sup_{p \in M} | f(p) - \varphi(p) | .$$

Для случая, когда M — переплетение, предлагается следующий метод. Определим симметризованную функцию $f^* = f - 1/2 (\max f + \min f)$ (для таких функций $\min_M f^* = - \max_M f^*$). Под f_A (аналогично f_B) понимаем симметризацию f на каждом A_i, т. е. $f_A | A_i = (f | A_i)^*$, где $f | A_i$ — сужение функции f на множестве A_i. Строится последовательность

$$f^0, f^1, \ldots, f^n, \ldots, \qquad (1)$$

где $f^0 = f$, $f^{2n+1} = f_A^{2n}$, $f^{2n+2} = f_B^{2n+1}$. Основной результат работы составляет

Теорема. Для любой f на M последовательность (1) сходится к функции $\overline{f}$, для которой $f_A = f_B = \overline{f}$. Функция $\varphi = f - \overline{f}$ дает решение исходной задачи; $\| \overline{f} \| = \inf_{\varphi \in \Phi} \| f - \varphi \|$. На простом примере показано, что этот метод может оказаться непригодным для случая более общих разбиений $M = \bigcup T_i$. Рассмотренную задачу можно свести к задаче линейного программирования: найти x_i, y_j, s, дающие минимум $L(x_i, y_j, s) \equiv s$ при условиях $\sum x_i a_i(p) + \sum y_j b_j(p) - s \leqslant f(p)$, $\sum x_i a_i(p) + \sum y_j b_j(p) + s \geqslant f(p)$, $p \in M$. А. А. Корбут

9 В146. Симпозиум по линейному программированию. Vajda S. Symposium on linear programming. «Informat. processing. Paris — München — London», 1960, 99—101 (англ.)

Краткое изложение пяти докладов. 1) Во вступительном обзорном докладе С. Вайда говорил о современном состоянии теории и вычислительных методов линейного программирования, а также о перспективах продвижения в новых направлениях (целочисленные и нелинейные задачи, приближенные машинные методы для задач с большими матрицами). 2) А. У. Таккер («Абстрактная структура линейного программирования») предложил геометрическую модель, позволяющую наглядно интерпретировать все основные понятия для пары двойственных задач. 3) Д. Принз («Приложение троичной арифметики к решению транспортной задачи») вкратце рассказал о новых принципах построения программы решения транспортной задачи на вычислительной машине «Пегас». 4) Э. Чини и А. Голдстейн («Машинные методы построения чебышевских приближений») описали метод вычисления наилучшего приближения в метрике пространства C и вкратце обсудили ту же задачу в метрике L_2. 5) Г. У. Кун («О транспортной задаче») указал на возможность сведения транспортной задачи к матричной игре. А. А. Корбут

9 В147. Система уравнений и линейное программирование. Boyd K. T. Simultaneous equations and linear programming. «Comput. J.», 1960, **3**, № 1, 45—46, 50 (англ.)

Описана схема использования симплекс-метода для решения системы линейных алгебраических уравнений. Рассмотрен пример. Л. И. Горьков

9 В148. Письмо в редакцию. Prinz D. G. Correspondence. «Comput. J.», 1960, **3**, № 2, 66 (англ.)

Схематическое описание решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью симплекс-метода. Описанная схема была реализована на вычислительной машине Манчестерского университета в 1953 г. Л. И. Горьков

9 В149. Линейное программирование в условиях неопределенности. Krelle W. Lineat programming under uncertainty. «Conf. 6 Congr. internat. Inst. Manag Sci.», Paris, 1959. Londres—Paris—New York—Los Angeles, № 36, 1—5 pp. (англ.)

Четкое изложение основных концепций названной проблемы. И. В. Романовский

9 В150. О задачах потока через сеть при ограничениях на пропускные способности пучков. Matthys Gaston. Sur les problèmes de flot dans un réseau à capacités de faisceaux. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 17, 2840—2842 (франц.)

Множество дуг U графа G разбивается на подмножества — «пучки» F_k. Требуется найти поток φ (заданную на дугах графа неотрицательную функцию), максимизирующий форму

$$\varphi D = \sum_u D_u \varphi_u,$$

где D_u — заданные числа такие, что для любого цикла μ $\sum_\mu D_u \leqslant 0$ при условиях

$$\sum_{F_k} \varphi_u \leqslant S_k.$$

Указываются признаки решения и строится алгорифм его отыскания. И. В. Романовский

9 В151. Об одной теореме Р. Белмана. Романовский И. В. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, **4**, № 4, 456—458 (рез. англ.)

Дано исправленное доказательство теоремы 3 гл. XI монографии Р. Белмана (РЖМат, 1961, 6В133К). А. А. Корбут

9 В152. Вероятностная модель обучения с памятью. Overall John E. A cognitive probability model for learning. «Psychometrika», 1960, **25**, № 2, 159—172 (англ.)

Рассматривается модель обучения, основанная на концепции запоминания процесса обучения: предполагается, что с вероятностью a объект обучения запоминает результат непосредственно предшествующего опыта, а результат первого опыта, если всего проводилось n опытов, запоминает с вероятностью ak^{n-1} и

$$a + ak + \ldots + ak^{n-1} = 1.$$

Доказывается, что такая модель асимптотически приводит к тем же результатам, что и модель с линейными операторами, но отличается от нее на ранних опытах. Е. Б. Яновская

9 В153. Аддитивные предпочтения. Houthakker H. S. Additive preferences. «Econometrica», 1960, **28**, № 2, 244—257 (англ.)

Работа посвящена некоторой конкретизации теории потребительского выбора. Вводится понятие прямой и косвенной функции полезности и в связи с этим рассматриваются прямо аддитивное и косвенно аддитивное предпочтения. Е. П. Липатов

9 В154. Замечания по поводу статьи Шакуна. Davis Gordon B. Comments on a paper by Shakun. «Operat. Res.», 1960, 8, № 3, 425 (англ.)

Автор отмечает, что в постановке задачи о разделе прибылей (РЖМат, 1961, 7В95) не учтены некоторые существенные стороны вопроса; сами по себе методы исследования построенной Шакуном модели не вызывают у него возражений. А. А. Корбут

9 В155. К проблеме исчисления эффективности. Vincze E. Über das Problem der Berechung der Wirtschaftlichkeit. «Acta techn. Acad. scient. hung.», 1960, **28**, № 1-2, 33—41 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

В качестве меры эффективности при сравнении различных производственных процессов для изготовления некоторого продукта автор предлагает ввести функцию эффективности $G(n, p, t)$ (n — количество продукта, p — издержки производства, t — время изготовления), удовлетворяющую условиям: а) G — непрерывная функция, возрастающая по n, убывающая по p и t; б) $G(n, p, t) > 0$ при $n, p, t > 0$; в) $G(kn, kp, kt) = G(n, p, t)$; г) $G(kn, kp, t) = f(k), G(n, p, t)$; д) $G(kn, p, kt) = kG(n, p, t)$. Функция, удовлетворяющая условиям а) — д), имеет вид:

$$G(n, p, t) = \frac{n}{n_0}\frac{p}{p_0}\left(\frac{n}{n_0}\frac{t_0}{t}\right)^{\alpha},$$

где постоянные n_0, p_0, t_0, α определяются эмпирически. А. А. Корбут

9 В156. К построению более общей теории капитала. Blyth C. A. Towards a more general theory of capital. «Economica», 1960, **27**, № 106, 120—136 (англ.)

9 В157. Об одной задаче чистой экономии. Frisch Ragnar. Sur un problème d'économie pure. «Metroeconomica», 1957, **9**, № 2, 79—111 (франц.)

9 В158. О динамической экономике. Cherubino Salvatore. Sulla dinamica economica. «Atti. Accad. naz. Lincei. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1957, **22**, № 3, 281—285 (итал.)

9 В159. Некоторые свойства динамической леонтьевской системы со спектром способов. Morishima Michio. Some properties of a dynamic Leontief system with a spectrum of techniques. «Econometrica», 1959, **27**, № 4, 626—637 (англ.)

Изучается экономика, состоящая из n отраслей, каждая из которых производит один продукт. Для производства j-го продукта могут быть использованы m_j способов (в обычной леонтьевской модели $m_j = 1$). При этом предполагается, что время существования по крайней мере одного продукта больше единицы (в статической модели каждый продукт существует ровно единицу времени). Основными результатами являются: 1) равновесные цены устойчивы в целом; 2) стационарные решения для выпуска продукции не устойчивы; 3) существует некоторое сбалансированное растущее решение; 4) это сбалансированное решение неустойчиво, если время существования продукта достаточно мало (реф. 9В160). Л. И. Горьков

9 В160. О некоторых свойствах устойчивости леонтьевских динамических моделей. Wurtele Zivia S. A note on some stability properties of Leontief's dynamic models. «Econometrica», 1959, **27**, № 4, 672—675 (англ.)

Рассматривается динамическая модель Леонтьева описываемая системой разностных уравнений

$$X(t) = AX(t) + B\frac{X(t) - X(t-\tau)}{\tau} + Y(t),$$

где A — матрица технических коэффициентов, B — матрица, характеризующая капиталовложения, $X(t)$ — вектор выпуска в момент времени t, $Y(t)$ — вектор спроса в момент времени t. Элементы матриц A и B не зависят от времени. Показано, что при достаточно большом τ (определяемым наибольшим собственным значением матрицы $(I-A)^{-1}B$) рассматриваемая модель оказывается устойчивой (реф. 9В159). Л. И. Горьков

9 В161. Доказательство устойчивости равновесия с помощью дифференциального уравнения Брауна — фон-

Неймана. Nikaidô Hukukane. Stability of equilibrium by the Brown—von Neumann differential equation. «Econometrica», 1959, **27**, № 4, 654—671 (англ.)

Решается задача о глобальной устойчивости конкурентного равновесия при условии, что цена каждого товара зависит от спроса, но не зависит от снабжения. В этом случае система, описывающая процесс конкурентной торговли, может быть сведена к системе, описываемой дифференциальными уравнениями Брауна — фон-Неймана (Brown—von Neumann. Contributions to the theory of games, vol. **1**, Princeton, 1950, 73—79). Доказательство устойчивости использует идею Брауна и фон-Неймана и обобщает их результат.

Е. Б. Яновская

9 В162. Динамическая модель управления с вычислительной машиной «Булль». Busca Franco. Un modello dinamico di gestione con calcolatore Bull. «Schede perfor. e calcolo elettron.», 1959, **5**, № 30, 261—263 (итал.)

В октябре 1959 г. в Вычислительном центре «Оливетти Булль» (Милан, Италия) на 3-й сессии Курсов по применению численных методов в хозяйстве, организованных I. P. S. O. A. (Istituto Postuniversitario per lo Studio dell'Organizzazione Aziendale — Послеуниверситетский институт для изучения организации хозяйства), была проведена коммерческая игра по изучению динамики управления хозяйством в условиях капиталистической конкуренции нескольких фирм. Игра имела целью обучение административного персонала фирм управлению в условиях, близких к действительности. Участвующие в игре образуют администрацию нескольких (при данной программе — до 4) конкурирующих «фирм», каждая из «фирм» может обладать несколькими «заводами», продукция которых «сбывается» на рынке, разделенном на 5 «секторов». Управление ведется по дискретным «периодам управления», соответствующим кварталу или полугодию в реальном времени. Решения, принимаемые администрацией «фирм» в областях снабжения сырьем, финансовой и коммерческой политики, политики производства, возможной постройки новых заводов, разработки новых образцов продукции, распределения готовой продукции между «секторами сбыта», заносятся в специальную форму — «лист управления», которая по окончании очередного «периода управления» передается для обработки, с целью определения новой экономической ситуации. Отпечатанные формы с результатами — данные о коммерческой ситуации — раздаются администрации «фирм», которые начинают новый «период управления». В игре приняло участие 25 администраторов и техников, образовавших 3 «фирмы» с различными начальными данными. Игра приняла азартный характер и оказалась весьма интересной и полезной.

И. В. Лебедев

9 В163. Влияние ошибок прогнозирования на оптимальное программирование. Theil H., Kaptein E. The effect of forecasting errors on optimal programming. «Manag. Sci. Models and Techniques. Vol. **1**», Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1960, 295—322 (англ.)

Рассматривается влияние возникающих из-за отсутствия полной информации ошибок на следующую модель управляемой экономической системы. Развитие системы характеризуется несколькими параметрами. Некоторая группа этих параметров $x_t = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ контролируется управляющим органом. Другая группа $y_t = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ не контролируется, и управляющий орган может влиять на нее только косвенно через параметры первой группы. Предполагается, что y_t линейно зависит от

$$x_t, x_{t-1}, \ldots, x_1,$$

т. е. что

$$y_t = \sum_{s=1}^{t} R_{ts} x_s + S_t.$$

При этом свободные члены S_t содержат случайные компоненты. Управляющий орган должен найти такие значения контролируемых переменных, чтобы математическое ожидание от некоторой целевой функции $w(x, y)$ от значений x_t и y_t за планируемый период (скажем, $t = 1, 2, \ldots, T$) достигало экстремума. Функция $w(x, y)$ предполагается квадратичной. В этих условиях, естественно, решение о значении x_t должно приниматься с учетом значений x_s и y_s для $s < t$, которые считаются известными в момент t. Поэтому надо уметь принимать правильное решение только на начало планируемого периода. Исследуются потери, которые происходят за счет принятия неоптимального решения и за счет случайных возмущений в системе, которые отклоняют значения y_t от их математических ожиданий, получаемых из условия линейной связи между группами контролируемых и неконтролируемых параметров. Модель и все выводы применяются к анализу развития экономики США в период окончания депрессии: 1933—1936 гг. При этом в качестве контролируемых величин принимаются следующие: 1) сумма государственных налогов, 2) сумма заработной платы, выплачиваемой государством, и 3) прочие государственные расходы. В качестве неконтролируемых параметров берутся: 1) совокупное общенациональное потребление, 2) сумма всех капиталовложений и 3) переменная, характеризующая распределение доходов от частных предприятий на заработную плату и прибыль (а именно отклонение суммы заработной платы от удвоенной суммы прибыли). В качестве целевой функции $w(x, y)$ берется сумма квадратов отклонений перечисленных параметров за каждый из 4 лет рассматриваемого периода от некоторых желаемых значений.

В. А. Волконский

9 В164. Уклонение системы уравнений в связи с производственной функцией Кобба — Дугласа. Hoch Irving. Simultaneous equation bias in the context of the Cobb—Douglas production function. «Econometrica», 1958, **26**, № 4, 566—578 (англ.)

Рассматривается задача нахождения оценок a_i по эмпирическим данным для производственной функции Кобба—Дугласа

$$X_0 = K_0 \prod_{i=1}^{n} X_i^{a_i},$$

где X_0 — выпуск продукции, X_i — затраты, a — эластичность выпуска по отношению к затратам, K_0 — постоянная. Оценки a_i находятся по методу наименьших квадратов. Рассматриваются два случая: I. Изменение производственной функции влияет только на выпуск и не передается другим переменным системы; в этом случае оценки, найденные по методу наименьших квадратов, являются состоятельными. II. Изменения производственной функции сказываются на всех переменных; результирующее уклонение называется уклонением системы. В этом случае оценки, найденные по методу наименьших квадратов, не являются состоятельными, поэтому используются оценки «асимптотического метода наименьших квадратов» (оценки по методу наименьших квадратов для бесконечной выборки). При некоторых предположениях найденные уравнения решаются и изучаются их решения.

К. А. Горькова

9 В165. Отношение выпуска к инвестициям и анализ балансов затрат и выпуска продукции. Lange Oskar. The output-investment ratio and input—output analysis. «Econometrica», 1960, **28**, № 2, 310—324 (англ.)

9 В166. Упрощенный метод максимального правдоподобия и сравнительные структурные оценки. Brown T. M. Simplified full maximum likelihood and comparative structural estimates. «Econometrica», 1959, **27**, № 4, 638—653 (англ.)

На искусственно сконструированных численных примерах полной экономической модели сравниваются различные модификации метода максимального правдоподобия. С. С. Кислицын

9 В167. Некоторые наблюдения по анализу «затрат—выпуска». Lange Oskar. Some observations on input-output analysis. «Sankya, Indian J. Statist.», 1957, **17**, № 4, 305—336 (англ.)

9 В168. Модель Маршака и Микки в применении к планированию рекламной деятельности. Brambilla Francesco. Un modello di Marschack e Michey adattato ad un problema di programmazione di azione pubblicitaria. «Bol. Centro ricerca operat. Ser. metodol.», 1959, **3**, № 2, 3—11 (итал.)

Имеется n видов рекламы. Стоимость условной единицы i-го вида равна c_i. Эффективность рекламной кампании $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ измеряется функцией

$$U(y)=\int_0^\infty u(x)\,f(x\mid y)\,dx,$$

где $u(x)$ — функция выгоды, равная 1, если количество привлеченных лиц превысит β и 0 в противном случае; $f(x\mid y)$ — условная плотность распределения числа привлеченных лиц при данном y (предполагается нормальной с параметрами

$$\varkappa=\sum_{i=1}^n p_i y_i,\quad \sigma^2=\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)\,y_i).$$

Описывается метод нахождения максимума $U(y)$ при ограничении $\sum_{i=1}^n c_i y_i \leqslant k$. С. С. Кислицын

9 В169. Моделирование работы ремонтного цеха с помощью вычислительных машин. Baker C. T., Dzielinski B. P. Simulation of a simplified job shop. «Manag. Sci.», 1960, **6**, № 3, 311—323 (англ.)

Методами дисперсионного анализа проводится исследование зависимости длины производственного цикла от различных факторов (числа мест обработки, колебаний скорости выполнения операций, плана обработки). Число мест обработки изменяется в пределах от 9 до 30, число операций для отдельного вида изделий — от 2 до 10. Колебания в скорости выполнения операций экспоненциальны. Необходимые для расчета данные получены с помощью псевдослучайных чисел. Библ. 13 назв. С. С. Кислицын

9 В170. Об оптимальной экстракции с пересекающимися потоками. Aris R., Rudd D. F., Amundson N. R. On optimum cross-current extraction. «Chem. Engng Sci.», 1960, **12**, № 2, 88—97 (англ.)

Рассматривается следующий n-стадийный процесс экстрактирования с несмешивающимися потоками: первый поток проходит последовательность агрегатов с постоянной скоростью q. Состояние этого потока на каждой стадии определяется концентрацией потока x. Этот поток в N точках пересекают потоки экстрактирующей жидкости — промывающей воды — со скоростью w_n $(n=1,\ldots,N)$ в n-й точке. Промывающая вода после прохождения n-го агрегата имеет концентрацию y_n. В связи с этим могут быть рассмотрены следующие две проблемы:

1. Зафиксировав общее количество промывающей воды W_N, распределить ее по N агрегатам так, чтобы максимизировать количество экстрактируемой жидкости Q_N.

2. Если λ — отношение стоимости подачи промывающей воды к общей стоимости экстрактирования, то как выбирать w_n, чтобы доход $Q_N-\lambda W_N$ был максимальным?

Воспользовавшись принципом оптимальности, в первом случае получим:

$$f_N(a,b)=\max_{\{w_n\}} Q_N=\max_{w_1}\{f_{N-1}(x_1,\,b-w_1)+q(a-x_1)\},$$

где $a=x_0$, $b=W_N$. В случае 2, если λ фиксировано, то $Q_N-\lambda W_N$ есть функция x_0, и по принципу оптимальности получим

$$f_{N,\lambda}(a)=\max_{\{w_n\}}(Q_N-\lambda W_N)=$$
$$=\max_{w_1}\{f_{N-1,\lambda}(x_1)+q(a-x_1)-\lambda w_1\}.$$

Предположим, что в каждой точке n $(n=1,2,\ldots,N)$ x_n и y_n выражаются друг через друга

$$x_n=\varphi(y_n)\ \text{и}\ y_n=\psi(x_n)$$

и

$$w_n y_n=q(x_{n-1}-x_n).$$

Обозначив $v_n=w_n/q$, получим

$$v_n y_n=x_{n-1}-x_n.$$

Тогда если обозначить

$$g_N(a)=\max_{\{v_n\}}\sum_{n=1}^N v_n(y_n-\lambda),\ \text{где}\ x_1=a,$$

то в случае 2 соответствующее функциональное уравнение будет

$$g_N(a)=\max_{v_1}\{g_{N-1}(x_1)+v_1(y_1-\lambda)\},$$

где

$$x_1=a-v_1\,g_1=\varphi(y_1)\ \text{и}\ g_0(a)=0.$$

В предположении, что $x=\alpha y$, доказано, что оптимальное поведение состоит в равномерном распределении промывающей воды по N агрегатам, и решение первой проблемы представляется в виде

$$f_N(a,\,b)=qa\left[1-(N+1)\,\alpha\left(\frac{b}{Nq}+\alpha\right)^{-N}+\right.$$
$$\left.+N\alpha^{N+1}\left(\frac{b}{Nq}+\alpha\right)^{-(N+1)}\right].$$

Рассмотрен случай $N\to\infty$. Дан пример, где x и y связаны нелинейно. В последней части рассмотрены некоторые обобщения задачи. Есть опечатки.

Е. П. Липатов

9 В171. Замечание по поводу статьи Ферстмана. Schild Albert. Note on a paper by Firstman. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 3, 420—421 (англ.)

Дано простое доказательство по индукции для матрицы вида P^n в статье Ферстмана (РЖМат, 1960, 10710), а также исправлены некоторые вероятности перехода в матрице, составленной Ферстманом для случая трех ракет и одного командного поста. А. А. Корбут

9 В172. Статистическое обследование промышленных предприятий средней величины. Loizelier E. Blanco. La inspección estadistica en las industrias de tipo medio. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 472—476 (исп.; рез. франц., англ.)

9 В173. Алгорифмы для решения задач теории расписаний. Giffler B., Thompson G. L. Algorithms for solving production-scheduling problems. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 4, 487—503 (англ.)

Рассматривается общая задача теории расписаний (m предметов, n операций, ограничения на последовательность обработки и время между операциями). Расписание называется действенным (active), если его длина не может быть уменьшена с помощью допустимых левых сдвигов. Описывается алгорифм построения класса действенных расписаний. С. С. Кислицын

9 В174. Метод точечных преобразований в задаче составления оптимального графика ритмичного производства двух типов изделий на одном оборудовании. Алексеев А. С. «Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика», 1960, **3**, № 4, 706—715

Процессы производства двух изделий на одном оборудовании интерпретируются как движения некоторой

нелинейной динамической системы. Тогда составление графика запуска этих изделий (при условии сохранения ритмичности производства, выполнения программы за минимальное число запусков и при минимальном объеме незавершенного производства) сводится к нахождению устойчивой неподвижной точки некоторого точечного преобразования, соответствующей устойчивому предельному циклу рассматриваемой динамической системы, и подбору оптимального с точки зрения минимального объема незавершенного производства сочетания параметров системы (из области существования этого предельного цикла при заданном запасе устойчивости). Указан переход к n-мерному случаю.

Резюме автора

9 В175. Программирование со случайными ограничениями. Charnes A., Cooper W. W. Chance-constrained programming. «Manag. Sci.», 1959, **6**, № 1, 73—79 (англ.)

На примере одной из задач теории управления запасами демонстрируется сложность задач линейного и нелинейного программирования в условиях неопределенности. Намечается путь преодоления этих трудностей, отличный от подхода Р. Белмана (РЖМат, 1961, 6В133К, гл. 5).

И. В. Романовский

9 В176. Дальнейшие замечания о потерях, связанных с использованием неточных данных при вычислении оптимальной политики запасов. Levy Joel. Further notes on the loss resulting from the use of incorrect data in computing an optimal inventory policy. «Naval. Res. Logist. Quart.», 1959, **6**, № 1, 25—31 (англ.)

Вторая статья автора на эту же тему (РЖМат, 1960, 14208). Для уравнения оптимального управления запасами (РЖМат, 1961, 6В133К, гл. V)

$$f(x) = \min_{y \geqslant x} \Big[k(y-x) + a \Big[\int_y^\infty p(s-y)\, g(s)\, ds + f(0) \int_y^\infty g(s)\, ds + \int_0^y f(y-s)\, g(s)\, ds \Big] \Big]$$

изучаются убытки, происходящие от ошибок в определении данных задачи от замены точного значения функции штрафа p неточным значением $\overline{p}$ и точного значения коэффициента скидки a неточным значением $\overline{a}$. Для обоих этих случаев приведены точные и упрощенные выражения. Численных примеров нет.

А. А. Корбут

9 В177. Изнашивание запасов и оборудования. Klein M., Rosenberg L. Deterioration of inventory and equipment. «Naval Res. Logist. Quart.», 1960, **7**, № 1, 49—62 (англ.)

Обзорная статья. Рассмотрены различные варианты задачи о замене устаревшего оборудования, задача об оптимальном порядке выпуска изделий с переменной полезностью со склада (РЖМат, 1958, 4022; 1961, 4В135, 4В136,4В138) и задача о проведении контрольных выборок с целью поддержания заданного уровня количества и качества портящихся продуктов. Библ. 25 назв.

А. А. Корбут

9 В178 К. Введение в линейное программирование. Garvin Walter W. Introduction to linear programming. New York, McGraw-Hill Book Co., 1960, XIV, 281 pp., 8.75 doll.; 68sh. «Publishers' Weekly», 1960, **178**, № 15, 60; «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 567, 15 (англ.)

9 В179 К. Введение в линейное программирование. Stockton R. Stansbury. Introduction to linear programming. Boston, Allyn and Bacon; London, Prentice-Hall, 1960, vi, 104 pp., ill., 24 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 548, 11 (англ.)

9 В180 К. Линейное программирование. Изложение симплекс-метода. Greenwald D. U. Programmation linéaire et algorithme du simplexe. Trad. Paris. Dunod, 1960, 93 p., ill., 9 NFr. «Bibliogr. France», 1960, **149**, № 24, 730 (франц.)

См. РЖМат, 1961, 2В145 К.

9 В181 К. Распределение доходов. Brambilla Francesco. La distribuzione dei redditi. Pavia, Prem. tip. Successori Frat. Fusi, 1960, VIII, 298 p., ill. (итал.)

9 В182 К. Методы осуществимого управления; исследования в области линейного и нелинейного программирования. Zoutendijk G. Methods of feasible directions; a study in linear and nonlinear programming. New York, Elsevier Publ. Co., 1960, 126 pp., 6.25 doll. «Publishers's Weekly», 1960, **178**, № 21, 78 (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Редактор *Р. Л. Добрушин*

9 В183. Об одном обобщении теории вероятностей. Müller Maurice. Sur une extension du calcul des probabilités. «Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker», 1958, **58**, № 1, 113—118 (франц.)

Предлагается определение условной вероятности, отличающееся от общепринятого. Дается одна интерпретация этого определения в терминах квантовой механики. Пусть волновая функция Ψ разлагается в ряд по системам функций φ_μ^α и φ_ν^β

$$\Psi = \sum_\mu a_\mu^\alpha \varphi_\mu^\alpha = \sum_\nu a_\nu^\beta \varphi_\nu^\beta,$$

причем

$$\varphi_\mu^\alpha = \sum_\nu c_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi_\nu^\beta;$$

число

$$q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = c_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \overline{c}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$$

называется вероятностью того, что β принимает значение ν при условии, что α принимает значение μ. При таком определении оказывается несправедливой формула полной вероятности, т. е.

$$p_\mu^\alpha \neq \sum_\nu p_\nu^\beta q_{\mu\nu}^{\alpha\beta},$$

где

$$p_\mu^\alpha = a_\mu^\alpha \overline{a}_\mu^\alpha; \quad p_\nu^\beta = a_\nu^\beta \overline{a}_\nu^\beta.$$

Ю. Ф. Кичатов

9 В184. Ансамбли, соответствующие максимуму энтропии. Mayer Joseph E. Ensembles of maximum entropy. «J. Chem. Phys.», 1960, **33**, № 5, 1484—1487 (англ.)

Рассматривается множество функций распределения W_N для N частиц в фазовом пространстве и функции распределения для нескольких частиц $\omega_0 = \text{const}$, $\omega_1, \ldots, \omega_{n_0-1}$, где $n_0 \ll N$, получающиеся из W_N при интегрировании по импульсам и координатам $N - n_0$ частиц. Для каждой из W_N можно определить единственный набор «корреляционных» функций φ_n, зависящих от переменных одной, двух и т. д. до N частиц, таких, что $\ln W_N$ выражается в виде суммы этих функций. Доказана теорема: Если W_N из всех возможных функций, приводящих к одинаковым $\omega_0, \ldots, \omega_{n_0-1}$, соответствует максимальному значению энтропии (по Больцману), то для этой функции W_N все высшие корреляционные функции $\varphi_n \equiv 0$ $(n \geqslant n_0)$. Изменение энтропии всей системы, происходящее вследствие неизбежных случайных колебаний внешних условий, связывается с изменениями в этих «многочастичных функциях» φ_n.

И. А. Квасников

9 В185. Применение методов квантовой теории поля в статистической физике. Алексеев А. И. «Успехи физ. наук», 1961, 73, № 1, 41—88

В первой части работы дается последовательное изложение термодинамической теории возмущений для статистических систем, предложенной Мацубарой (см. Progr. Theor. Phis, 14, 351, (1955)). Формальное сходство уравнений для статистической матрицы плотности $\rho = e^{(\mu N - H)\beta}$ (μ — химический потенциал, $\beta = 1/kT$, $H = H_0 + H_1$ и N — операторы Гамильтона и полного числа частиц системы, H_0 — гамильтониан системы невзаимодействующих частиц) и уравнения Шредингера позволяет по аналогии с квантовой теорией поля ввести S-матрицу, зависящую уже от температуры: $\rho = e^{(\mu N - H_0)\beta} S(\beta)$. Решение уравнения для S-матрицы $-\partial S/\partial\beta = H_1(\beta)\, S$ можно записать в виде ряда по степеням интенсивности взаимодействия, входящей в H_1:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\tau_1 \ldots \int_0^\beta d\tau_n T\,(H_1(\tau_1) \ldots H_1(\tau_n)),$$

где $H_1(\tau) = e^{-(\mu N - H_0)\tau} H_1 e^{(\mu N - H_0)\tau}$, T — операция упорядочения по переменной τ, такая, что численные значения τ у операторов возрастают справа налево. Показано, что раскрытие упорядоченного произведения можно производить с помощью приема, аналогичного теореме Вика для раскрытия хронологизированного произведения зависящих от времени операторов в квантовой теории поля. Общие теоремы проиллюстрированы на примерах электрон-фононной системы с взаимодействием

$$H_1 = g \sum \sqrt{\frac{\omega_k}{2V}}\,(a^+_{p+k,r} a_{pr} b_k + a^+_{p-k,r} a_{pr} b^+_k),$$

где a^+_{pr}, a_{pr} и b^+_k, b_k — операторы рождения и уничтожения электрона (p — импульс, r — спиновый индекс) и фонона (с импульсом k) и системы фермионов (или бозонов) с парным взаимодействием. Каждому члену ряда для термодинамического потенциала $\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Sp\rho$ взаимно однозначно сопоставляется диаграмма определенного вида. Показано, что для определения Ω достаточно рассматривать только вклады L_s от связных диаграмм, причем $\Omega = \Omega_0 - \frac{1}{\beta}\sum L_s$. Вычислена первая поправка на взаимодействие для указанных систем.

Во второй части рассмотрены свойства термодинамических функций Грина типа

$$\mathfrak{G}_1(x, x') = <T(\psi(x)\,\psi^+(x')\,S)>/<S>,$$
$$D_1(x, x') = <T(\varphi(x)\,\varphi(x')\,S)>/<S>,$$

где угловые скобки означают усреднение по большому ансамблю системы без взаимодействия

$$<A> = Sp e^{(\mu N - H_0)\beta} A / Sp e^{(\mu N - H_0)\beta},$$

$\psi(x)$ и $\varphi(x)$ — операторные функции электронов и фононов:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{pr} a_{pr} U^r e^{ipx - (\varepsilon_p - \mu)\tau},$$

$$\varphi(x) = \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2V}}\,(b_k e^{ikx - \omega_k \tau} + b^+_k e^{-ikx + \omega_k \tau});$$

U^r — спиновые волновые функции электронов. Для указанных функций Грина, а также функций того же типа, определяемых бо́льшим числом операторных функций (многочастичные функции), получена система зацепляющихся уравнений. На примере релятивистской электрон-позитронной системы с взаимодействием через электромагнитное поле система интегральных уравнений для одночастичных функций Грина записана в замкнутом виде с дополнительным привлечением массового, поляризационного и вершинного операторов. Определена связь этих функций с термодинамическими характеристиками системы.

В третьей части обзора рассмотрены зависящие от времени термодинамические функции Грина вида $G(x,x') = -i[T(\widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}^+(x'))]$, где квадратные скобки — усреднение по большому ансамблю с полным гамильтонианом H, значки над ψ означают представление Гейзенберга: $\widetilde{\psi}(x) = e^{i(H-\mu N)t}\psi(x)e^{-i(H-\mu N)t}$. Для этих функций выводятся дисперсионные соотношения, связывающие действительную и мнимую части фурье-образа G. Рассмотрены некоторые аналитические свойства фурье-образов G, $\mathfrak{G}$ и так называемой запаздывающей функции Грина. Указано, что энергетический спектр системы, а также его затухание определяются полюсами фурье-образа функции G, и в качестве примера рассмотрен спектр сверхпроводящей системы (модель Бардина). Рассмотрено применение изложенной техники к изучению явлений рассеяния и торможения частиц, проходящих через вещество. И. А. Квасников

9 В186. Парная функция распределения для бозе-системы из твердых сфер. Garcia-Colin Leopoldo S., Peretti Jean. On the pair distribution function of a hard sphere Bose system. «J. Math. Phys.», 1960, 1, № 2, 97—106 (англ.)

Для вычисления коэффициентов предложенного Монтроллем и др. разложения парной корреляционной функции для неидеальной бозе-системы по степеням фугативности используется специальная диаграммная техника. Проведено частичное суммирование вкладов от трех типов диаграмм для бозе-газа, состоящего из твердых сфер. Получена первая поправка по a/λ (a — длина рассеяния, λ — длина волны, соответствующая тепловому движению) к корреляционной функции идеального бозе-газа. И. А. Квасников

9 В187. Усовершенствованный вариант эргодической теоремы в квантовой механике. Prosperi G. M., Scotti A. An improved version of an ergodic theorem in quantum mechanics, «Nuovo cimento», 1960, 17, № 2, 267—268 (англ.)

Улучшается одна из оценок предыдущей работы. См. РЖМат, 1960, 14269. Р. Л. Добрушин

9 В188. Изучение одной статистической модели, связанной с временами полета и флуктуацией времен перехода из одного состояния в другое для элементарных частиц. Blanc-Lapierre André, Dumontet Pierre. Etude d'un modèle statistique introduit par les techniques de temps de vol ou par l'étude des fluctuations de temps de transit. «C. r. Acad. sci.», 1960, 250, № 7, 1216—1217 (франц.)

Рассмотрим случайное событие A, наступающее в случайные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ Предположим, что j-е наступление вызывает случайное событие B в момент времени $s_j = t_j + \varphi_j$, где случайные величины φ_j ($j = 1, 2, \ldots$) не зависят от случайных величин t_h, независимы между собой и имеют одинаковое распределение. Ставится задача определения закона распределения случайных величин φ_j на основе следующей модели: а) последовательность t_j стационарна с плотностью ρ_0 (ρ_0 — константа); б) предполагается, что случайные величины φ_j имеют плотность распределения; в) пусть $\{\xi_j\}$ и $\{\theta_j\}$ — последовательности, выбранные независимым образом из последовательностей $\{t_j\}$ и $\{s_j\}$ так, что t_h принадлежит к последовательности $\{\xi_j\}$ с вероятностью p, s_h принадлежит к последовательности $\{\theta_j\}$ с вероятностью q (p и q — констан-

ты; г) пусть $R(t)$ и $S(t)$ — некоторые функции, положим

$$X(t)=\sum_j R(t-\xi_j),\quad Y(t)=\sum_j S(t-\theta_j).$$

Тогда при некоторых условиях, наложенных на $R(t)$ и $S(t)$, можно определить функцию корреляции $E(X(t)Y(t+\tau))$. С помощью этой функции можно определить неизвестную плотность распределения $g(\tau)$ случайных величин φ_j. Такие проблемы часто встречаются в приложениях, особенно в физике. J. Mogyoródi

Примечание редактора. По-видимому, в статье подразумевается, что последовательность t_j пуассоновская.

9 В189. Теория информации. Основные понятия и некоторые приложения в информационной технике. Станулов Николай. Теория на информацията, основни понятия и някои приложения в съобщителната техника. «Техника» (Бълг.), 1960, **9**, № 7, 1—5 (болг.)

Элементарный обзор. Р. Л. Добрушин

9 В190. Теория информации с практической точки зрения. Части I, II. MacAdam W. K. A practical look at information theory. Parts I, II. «Electr. Engng», 1960, **79**, № 6, 508—512; № 7, 584—587 (англ.)

Элементарные замечания. Р. Л. Добрушин

9 В191. Об основных теоремах теории информации. Takano Kinsaku. On the basic theorems of information theory. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1958, **9**, № 2, 53—77 (англ.)

Переизлагается с уточнениями и упрощениями известная работа Хинчина (РЖМат, 1959, 2937). В частности исправляется неверно данное Хинчиным определение канала с конечной памятью. Аналогичное изложение можно найти в книге Файнстейна (РЖМат, 1960, 1951 К). Р. Л. Добрушин

9 В192. Непрерывность и аксиоматическое определение Шеннон — Винеровской меры информации для непрерывных распределений вероятностей. Ikeda Sadao. Continuity and characterization of Shannon — Wiener information measure for continuous probability distributions. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, **11**, № 2, 131—144 (англ.)

Рассматривается частный случай обобщенной энтропии

$$H=-c\int p(x)\log p(x)\,m(dx),$$

где m — σ-конечная мера, а $p(x)$ — плотность распределения вероятностной меры, абсолютно непрерывной относительно m. В первой части работы дается достаточное условие законности предельного перехода под знаком H, этот результат включается в результат Р. Л. Добрушина (Теория вероятности и ее применение, 1960, № 4, 29—37) в наиболее интересном случае $m(R)<\infty$. Во второй части дается аксиоматическое построение функционала H. Пусть R — измеримое пространство с σ-алгеброй измеримых подмножеств S и заданной на них мерой m. Тогда для однозначного задания H оказываются достаточными следующие предположения:

1. Если X_E — мера с плотностью

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(E)} & \text{для некоторого } E\subset S,\\ 0 & \text{на } R-E,\end{cases}$$

то: а) $-\infty<H(X_E)<\infty$ и б) X_E задано в пространстве (R,S,m) и $X_{E'}$ в пространстве (R',S',m') и если $m(E)=m'(E')$, то $H(X_E)=H(X_{E'})$, а если $m(E)>m'(E')$, то $H(H_E)<H(X_{E'})$.

2. Выполняется известная формула условной энтропии.

3. Выполняются полученные автором условия предельного перехода. М. А. Кармазин

9 В193. О математической теории кодов, корректирующих ошибки. Shapiro H. S., Slotnick D. L. On the mathematical theory of error-correcting codes. «IBM J. Res. and Developm.», 1959, **3**, № 1, 25—34 (англ.)

Код объема N (определения и обозначения см. РЖМат, 1961, 5В132) называется плотно упакованным кодом для коррекции e ошибок, если сферы S_{x_i} радиуса e с центрами в точках x_i попарно не пересекаются и дают в сумме все пространство B^n. Известно (Hamming, Bell. System Tech. J., 1950, **29**, 147), что при $e=1$ плотно упакованные коды существуют лишь при $n=2k-1$. Доказывается, что при $e=2,3$, кроме известного кода Голе с $e=3$, $n=23$, $N=2^{11}$ (и тривиальных кодов с $N=2$), не существует плотно упакованных кодов. Для $e\geqslant 4$ авторам удается лишь показать, что не может существовать бесконечно много разных плотно упакованных кодов с тем же e. Доказательства сложны и основаны на методах алгебраической теорий чисел. В конце статьи указывается на возможность обобщения результатов на случай кодов с алфавитом из $p>2$ символов, где p — простое число. Подробно доказывается аналог результата Хемминга. Кроме того, даются некоторые верхние оценки для числа элементов в групповом коде с коррекцией ошибок.

Р. Л. Добрушин

9 В194. Коды, корректирующие одну ошибку для асимметричных бинарных каналов. Kim Wan H., Freiman Charles V. Single error-correcting codes for asymmetric binary channels. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 2, 62—66 (англ.)

Рассмотрим совокупность всех последовательностей из нулей и единиц длины n. Множество $X_1,\ldots,X_r$ таких последовательностей назовем кодом, корректирующим k 0-ошибок и l 1-ошибок (сокращенно (k,l)-код) объема r, если можно выбрать попарно непересекающиеся множества $V_1,\ldots,V_r$ так, чтобы к V_i принадлежали все последовательности, получающиеся из X_i, если заменить k или меньше нулей этой последовательности единицами и l или меньше единиц — нулями. Обычный код Хемминга, корректирующий k ошибок, будет в этой терминологии (k,k)-кодом. (k,l)-коды с $k\neq l$ естественно использовать, если матрица вероятностей перехода $\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}$, задающая канал, не симметрична ($\alpha\neq\beta$). В частности, при $\alpha\ll\beta$ можно пренебречь вероятностью ошибочно воспринять символ нуль как единицу, и здесь разумно использовать $(0,l)$-код. Пусть $W(X)$ — число единиц в последовательности X и $d(X_1,X_2)$ — число несовпадающих элементов в X_1 и X_2, стоящих на тех же местах. Показывается, что для того, чтобы код $X_1,\ldots,X_r$ был $(0,1)$-кодом, необходимо и достаточно, чтобы для всех пар $i\neq j$ выполнялось либо $d(X_i,X_j)\geqslant 3$, либо $|W(X_i)-W(X_j)|\geqslant 2$. Дается простой способ построения $(0,1)$-кодов, использующий известное построение $(1,1)$-кодов Хемминга. При том же значении n объем этого кода больше объема $(1,1)$-кода Хемминга. Для построенных кодов указывается простой алгорифм исправления ошибки.

Р. Л. Добрушин

9 В195. Коды, корректирующие много ошибок для асимметричного бинарного канала. Kim W. H., Freiman C. V. Multi-error correcting codes for a binary asymmetric channel. «IRE Trans. Circuit Theory», 1959, **6**, Spec. Suppl., 71—78 (англ.)

Дальнейшее развитие идей предыдущей работы (реф. 9В194). В терминах функций $W(X_i)$ и $d(X_i,X_j)$ указываются условия, при которых код $(X_1,\ldots,X_r)$

является (k, l)-кодом. Обобщая результат предыдущей работы, авторы дают общий метод построения некоторого класса (0, 2)-кодов и указывают на возможность построения тем же способом $(0, l)$-кодов с $l > 2$.

Р. Л. Добрушин

9 В196. Приближенное вычисление пропускной способности радиоканалов со случайными параметрами. Добрушин Р. Л., Хургин Я. И., Цыбаков Б. С. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 164—171

Решается задача о нахождении скорости передачи и пропускной способности многолучевых радиоканалов со случайными параметрами. Сигнал на выходе канала $\eta(t)$ связан с передаваемым сигналом $\xi(t)$, который представляет собой стационарный случайный процесс, соотношением

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\, \xi[t - \tau_k(t)] + \zeta(t),$$

где $\zeta(t)$ — аддитивный шум, а случайные функции $\alpha_k(t)$ и $\tau_k(t)$ характеризуют изменения уровня и времени распространения k-го луча. Рассматривается случай, когда $\alpha_k(t)$ и $\tau_k(t)$ являются достаточно медленными функциями времени, так что их можно считать не зависящими от t случайными величинами в течение достаточно больших интервалов времени, нужных для осуществления близкого к оптимальному кодирования. Сначала α_k и τ_k предполагаются неслучайными. В случае, когда при большом отношении мощности сигнала к мощности шума имеется один луч, значительно превосходящий по мощности остальные лучи, расчеты удается провести до конца. В общем случае произвольных случайных α_k и τ_k для определения экстремального спектра сигнала необходимо решить систему двух интегральных уравнений. При малых дисперсиях σ_{α_k} и σ_{τ_k} случайных величин α_k и τ_k систему можно решить при помощи разложения по малому параметру. В качестве примера приводится выражение для пропускной способности, вычисленной для указанного частного случая при выполнении соотношений $w\sigma_{\tau_k} \ll 1$, $\sigma_{\alpha_k} \ll 1$ (w — ширина полосы сигнала). Авторы утверждают, что для канала, описываемого формулой $\eta(t) = \alpha(t)\,\xi(t)$ (причем для любого t вероятность того, что $\alpha(t) = 0$, равна нулю), пропускная способность равна бесконечности.

Примечание референта. В работе допущены следующие опечатки: в формулах (8) и (9) на стр. 167 в знаменателе должна стоять функция $f_\zeta(\omega)$; в формулах (11), (12) и (13) на стр. 168 функция $f_\xi(\omega)$ должна быть заменена на $f_\zeta(\omega)$.

В. П. Яковлев

9 В197. Вопросы помехоустойчивости систем связи, осуществляющих прием сигнала в целом. Мешковский К. А. «Радиотехника», 1958, 13, № 6, 3—17

При помощи элементарных оценок сравниваются вероятности ошибок при различных способах кодирования и декодирования для канала с гауссовским аддитивным шумом.

Р. Л. Добрушин

9 В198. О классе полусепарабельных процессов. Lubbock J. K. On a class of semi-separable processes. «J. Electron. and Control», 1960, 8, № 1, 67—79 (англ.)

Случайный процесс $x_1(t)$ называется положительно полусепарабельным относительно случайного процесса $x_2(t)$, если

$$g(x_1, t_1, t_2) = \int [x_2 - Mx_2(t_2)]\, p_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_2 = g_1(x_1, t_1)\, g_2(t_1, t_2)$$

для значений $t_1 \geqslant t_2$. Здесь $p_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ — совместная плотность вероятностей для значений процессов $x_1(t_1)$ и $x_2(t_2)$. Если считать, что $g_2(t_1, t_1) = 1$, то из формулы (1) и формулы

$$\varphi_{x_1x_2}(t_1, t_2) = M[x_1(t_1) - Mx_1(t_1)][x_2(t_2) - Mx_2(t_2)] = \int x_1 g_1(x_1 t_1)\, g_2(t_1 t_2)\, dx,$$

получаем

$$g_2(t_1, t_2) = \frac{\varphi_{x_1x_2}(t_1, t_2)}{\varphi_{x_1x_2}(t_1, t_2)}.$$

Для того случая, когда $x_1(t) \equiv x_2(t)$, показывается, что

$$g_1(x_1, t_1) = [x_1 - Mx(t_1)] \cdot p(x_1, t),$$

где $p(x, t)$ — плотность распределения значений $x(t)$. Условие полусепарабельности выражается также в терминах характеристических функций. Если $x_1(t)$ положительно полусепарабелен относительно $x_2(t)$, то для $y_1(t) = f(x_1(t))$, где $f(x)$ — некоторая, вообще говоря, нелинейная функция,

$$\varphi_{y_1x_2}(t_1, t_2) = \frac{\int f(x_1)\, g_1(x_1, t_1)\, dx_1}{\int x_1 g_1(x_1,\ t_1)\, dx_1} \cdot \varphi_{x_1x_2}(t_1, t_2).$$

В частности,

$$Mx_1^n(t_1)[x_2(t_2) - Mx_2(t_2)] = \frac{\int x_1^n\, g_1(x_1, t_1)\, dx_1}{\int x_1 g_1(x_1, t_1)\, dx_1} \cdot \varphi_{x_1x_2}(t_1, t_2).$$

Отмечаются некоторые необходимые условия, которым удовлетворяют коэффициенты разложения плотности $p_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ по ортогональным полиномам (РЖМат, 1956, 1561). Показано, что из полусепарабельности процесса $x_1(t)$ относительно процесса $x_2(t)$ следует полусепарабельность процесса $x_1(t)$ относительно процесса $y_2(t)$, полученного с помощью линейного преобразования вида

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t, \lambda)\, [x_2(\lambda) - Mx_2(\lambda)]\, d\lambda + My_2(t)$$

из процесса $x_2(t)$. Пусть $x_2(t)$ — случайный процесс, который получается на выходе линейной системы с весовой функцией вида

$$RC^{-1} \exp\{-t/RC\},$$

на вход которой поступает случайный процесс $x_1(t) = \pm 1$, меняющий свой знак в моменты времени, образующие пуассоновский поток с интенсивностью μ. В этом случае процесс $x_1(t)$ оказывается положительно полусепарабельным относительно $x_2(t)$. Ю. К. Беляев

9 В199. К статистической теории оптимальной демодуляции. Thomas J. B., Wong E. On the statistical theory of optimum demodulation. «IRE Trans. Inform. Theory», 1960, 6, № 4, 420—425 (англ.)

Изучается задача выделения полезного сигнала $\mathbf{a}(u)$ из получаемого сообщения

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{m}[\mathbf{a}(u), u] + \mathbf{n}(u), \quad t - T \leqslant u \leqslant t,$$

являющегося q-мерным вектором: $\mathbf{r}(u) = (r_1(u), \ldots, r_q(u))$. Случайный вектор $\mathbf{n}(u)$ интерпретируется как «шум», вектор $\mathbf{m}[\mathbf{a}(u), u]$ представляет собой колебание, полученное в результате модуляции, определяемой преобразованием $\mathbf{m}$. Сигнал $\mathbf{a}(u)$ предполагает-

ся k-мерным вектором, где в общем случае $k \neq q$. В качестве наилучшей оценки $\mathbf{a}^*(u)$ для сигнала $\mathbf{a}(u)$ выбирается величина, обращающая в максимум апостериорную вероятность $p(\mathbf{a} \mid \mathbf{r})$. Преобразование, осуществляющее получение такой оценки по реализациям процесса $\mathbf{r}(u)$, авторы называют оптимальной демодуляцией. Все изложение предполагает, что процессы $\mathbf{a}(u)$ и $\mathbf{n}(u)$ совместно гауссовские с нулевыми средними и, вообще говоря, коррелированные. Если ввести обозначение $\mathbf{x}(u) = \begin{Vmatrix} \mathbf{a}(u) \\ \mathbf{n}(u) \end{Vmatrix}$, то в силу сделанных предположений относительно $\mathbf{a}(u)$ и $\mathbf{n}(u)$ процесс $\mathbf{x}(u)$ полностью описывается матрицей ковариации

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} R_{aa}(u, v), & R_{an}(u, v) \\ R_{na}(u, v), & R_{nn}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi_p(u)$ — ортонормированные собственные $(q+k)$-мерные вектор-функции матричного интегрального уравнения

$$\varphi(u) = \lambda \int_{t-T}^{t} R(u, v)\, \varphi(v)\, dv, \quad t - T \leqslant u \leqslant t.$$

Тогда $\mathbf{x}(u) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \varphi_p(u)$, где $M\alpha_p \alpha_s = \frac{1}{\lambda_p} \delta_{ps}$. Поскольку

$$p(\mathbf{a} \mid \mathbf{r}) \sim \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p \alpha_p^2 \right),$$

то задача нахождения максимума величины $p(\mathbf{a} \mid \mathbf{r})$ эквивалентна минимизации $\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p \alpha_p^2$. Показывается, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p \alpha_p^2 = \int_{t-T}^{t} \int \mathbf{x}(u)\, Q(u, v)\, \mathbf{x}(v)\, du dv,$$

где

$$\int_{t-T}^{t} R(u, v)\, Q(v, w)\, dv = \delta(u - w) E, \qquad (1)$$

E — единичная матрица, $\delta(u)$ — δ-функция. Предполагая функцию $\mathbf{m}[\mathbf{a}, u]$ дифференцируемой по $\mathbf{a}$ и обозначая через $M(\mathbf{a}^*, u)$ матрицу с элементами

$$M_{ij}(\mathbf{a}^*, u) = \left. \frac{\partial m_j(\mathbf{a}, u)}{\partial \mathbf{a}_i} \right|_{\mathbf{a} = \mathbf{a}^*},$$

авторы получают уравнение для оценки $\mathbf{a}^*$

$$\int_{t-T}^{t} [Q_{aa}(u, v) - M(\mathbf{a}^*, u)\, Q_{na}(u, v)]\, \mathbf{a}^*(v)\, dv =$$

$$= \int_{t-T}^{t} [M(\mathbf{a}^*, u)\, Q_{nn}(u, v) - Q_{an}(u, v)] \times$$

$$\times [\mathbf{r}(v) - \mathbf{m}(\mathbf{a}^*, v)]\, dv,$$

которое вместе с (1) в принципе решает поставленную задачу. К числу разобранных примеров относятся случаи, когда вектор-процесс $\mathbf{r}$ представляется в таком виде:

1) $r_1(u) = M(u)\, a(u) + n_1(u)$,
$r_2(u) = M(u)\, a(u) + n_2(u)$;

2) $r(u) = \cos \omega_0 u \cdot a_1(u) + \sin \omega_0 u \cdot a_2(u) + n(u)$;

3) $r(u) = \cos \omega_0 u \cdot a(u) + \sin \omega_0 u \cdot \hat{a}(u) + n(u)$,

$\hat{a}(u)$ — преобразование Гильберта процесса $a(u)$.

А. Н. Ширяев

9 В200. Некоторые соотношения в оптимальных системах обнаружения сигналов. Гуткин Л. С. «Радиотехника», 1960, **15**, № 2, 47—57

Пусть $y(t) = x(t) + n(t)$ представляет собой смесь сигнала $x(t)$ и «белого» шума $n(t)$ при одной гипотезе и $y(t) = n(t)$ при альтернативной гипотезе. В работе приводятся выражения, позволяющие определить энергию сигнала, необходимую для обеспечения заданных вероятностей ошибок для трех видов сигналов: 1) сигнала, известного точно, 2) сигнала со случайной равномерно распределенной на $[0, 2\pi]$ фазой, 3) флуктуирующего сигнала с амплитудой, распределенной по закону Релея, и равновероятностной на $[0, 2\pi]$ фазой. Приводимые формулы позволяют провести качественное сравнение различных систем наблюдения с энергетической точки зрения. Так, для случая, когда вероятности ложной тревоги и пропуска не должны превышать 0,1, энергия, требуемая для обнаружения сигнала со случайной фазой, превышает энергию, необходимую для обнаружения сигнала, известного точно, не более чем на 2 *дб*. Рассмотрен также случай многоканального обнаружения.

А. Н. Ширяев

9 В201. О синтезе линейных систем для прогноза хаотических сигналов. Medina Alejandro. On synthesis of linear systems for the prediction of chaotic signals. «Rev. Mexicana fis.», 1957, **6**, 73—86 (исп.; рез. англ.)

Обсуждается винеровское интегральное уравнение для функции Грина $S(t)$ некоторого фильтра, возникающее в проблеме определения линейного фильтра с минимальной среднеквадратичной ошибкой при заданных входных и выходных сигналах; $S(t)$ аппроксимируется линейными комбинациями функций $\delta(t - t_k)$. Для других целей такой прием использовался соответствующим образом Серрильо (Cerrillo, Rev. Mexicana fis., 1955, **4**, 61—92). Случайный процесс, описывающий сигналы, должен удовлетворять условию, что его функция ковариации интегрируема относительно $S(t)$.

K. Krickeberg

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 4.

9 В202. Влияние временной ошибки на спектр мощности выборочных данных. Akaike Hirotugu. Effect of timing-error on the power spectrum of sampled-data. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1960, **11**, № 3, 145—165 (англ.)

Рассматривается вопрос о воздействии временной ошибки (отклонения выборочных точек от соответствующих теоретических точек отсчета) на спектральные свойства выборочных данных. Предполагается, что выбор моментов отсчета не зависит от исходного стационарного процесса $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, и интервалы времени $\Delta\tau_n$, $n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ между выборочными точками образуют стационарный процесс. Величины τ_n определим следующим образом: $\tau_0 = \varepsilon$, $\tau_n - \tau_{n-1} = \Delta\tau_{n-1}$, где ε — случайная величина. Рассматривается стационарный процесс x_{τ_n}, $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, являющийся математической моделью последовательности выборочных данных. Целью статьи является изучение спектральных свойств процесса x_{τ_n}. Подробно рассмотрены два типа временных выборок. Первый соответствует случаю, когда выборки берутся в точках, являющихся целыми кратными постоянного времени Δt, и отклонения временных выборочных точек от соответствующих теоретических точек отсчета взаимно независимы и одинаково распределены. Явно выписывается соотношение, показывающее влияние временной ошибки на спектральную функцию выборочных данных. Эффект существенно не линеен. Рассматривается также случай, где выборочные точки образуют процесс восстановления (т. е. интервалы времени между после-

довательными выборочными точками взаимно независимы и одинаково распределены). Исследования показывают, что в практических приложениях этих выборочных процедур, если в исходном процессе имеется некоторая мощность в высокочастотных областях, временная выборка может описываться (во втором типе процедур приближенно) как низкочастотный фильтр со внутренним источником белого шума. Дан иллюстрирующий пример. В. И. Бабкин

9 В203. Энергетический спектр сигнала, получаемого посредством развертки. Игнатьев Н. К. «Радиотехн. и электроника», 1961, **6**, № 1, 25—30

При передаче телевизионного изображения в фототелеграфии и радиолокации используется процесс развертки (считывания). Задача развертки — сопоставление подлежащей передаче функции многих переменных $\xi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ одномерной функции $\eta(x)$. Устанавливается связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями функции η и функций ξ_2 и ξ_3, которые предполагаются случайными стационарными полями.

Показано, что

$$R_{\eta\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi_n \xi_n}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \times$$

$$\times D(u_1, u_2, \ldots, u_n, \tau)\, du_1 du_2 \ldots du_n,$$

где

$$R_{\eta\eta}(\tau) = M\eta(t)\,\eta(t+\tau);\ R_{\xi\xi}(u_1, u_2, \ldots, u_n) =$$

$$= M\xi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\xi_n(x_1 + u_1, x_2 + u_2, \ldots, x_n + u_n);$$

а $D(u_1, u_2, \ldots, u_n, \tau)$ — введенная автором дискретизирующая функция. Приводятся формулы для $D(u_1, u_2, u_3, \tau)$ и $D(u_1, u_2, \tau)$, представляющие соответственно дискретизирующие функции в телевидении и фототелеграфии. Связь между $f_{\eta\eta}(\omega)$ и $f_{\xi\xi}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ — спектральными плотностями соответственно процессов η и ξ_n устанавливается соотношением

$$f_{\eta\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_n \xi_n}(\omega_1 \omega_2, \ldots, \omega_n) \times$$

$$\times \widetilde{D}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega)\, d\omega_1 d\omega_2 \ldots d\omega_n,$$

где функция $\widetilde{D}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega)$ — преобразование Фурье функции $D(u_1, u_2, \ldots, u_n, \tau)$. Б. С. Цыбаков

9 В204. Ожидаемое число максимумов и минимумов стационарного процесса с негауссовской плотностью. Diederich Franklin. Expected number of maxima and minima of a stationary random process with non-Gaussian frequency distribution. «NACA Techn. Note», 1957, № 3718, 21 pp. (англ.)

Райс (РЖМат, 1956, 6002) дал оценку числа максимумов стационарного процесса при условии, что реализация и ее производная имеют совместное нормальное (гауссовское) распределение В настоящей статье рассматриваются стационарные процессы, у которых совместное распределение реализации и двух ее производных несколько отличается от нормального. Среднее число максимумов или минимумов выражается в терминах второго и высших моментов распределения при помощи многомерного ряда Эджворта. Этот подход приводит к существенной поправке соответствующих результатов, полученных для гауссовского процесса; дано явное выражение для двух первых поправочных членов, включающее третий и четвертый моменты. J. Kampé de Fériet

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 4.

9 В205. Оптимальные нелинейные системы, осуществляющие выделение сигнала с постоянными параметрами из шума. Стратонович Р. Л. «Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика», 1959, **2**, № 6, 892—901

На отрезке времени $[0, T]$ наблюдается случайный процесс

$$r(t) = s(x_1, \ldots, x_m; t) + n(t),$$

где шум $n(t)$ предполагается марковским процессом, а сигнал $s(x_1, \ldots, x_m; t)$ характеризуется постоянными значениями параметров, которые как раз и надо определить. Оценка параметров $x_1, \ldots, x_m$ проводится при известном $r(t)$ на основе анализа их апостериорного распределения, которое можно вычислить, зная распределение вероятностей процесса $n(t)$. Для апостериорной вероятности на физическом уровне строгости выводятся дифференциальные уравнения. А. Н. Ширяев

9 В206. Корреляция флуктуаций электромагнитного поля в среде со случайными неоднородностями над идеально проводящей плоскостью. Басс Ф. Г., Канер Э. А., «Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика», 1959, **2**, № 4, 565—572

В дополнение к работе авторов (РЖМат, 1960, 10733), в которой определялись средние квадраты флуктуаций амплитуды и фазы электромагнитного поля, распространяющегося в среде со случайными неоднородностями над идеально проводящей плоскостью, рассчитываются пространственные корреляционные функции для амплитуды и для фазы. Для этих функций указываются общие выражения и детально рассматриваются корреляции в точках, лежащих на прямой, перпендикулярной граничной плоскости (поперечная корреляция) и параллельной этой плоскости (продольная корреляция). Наиболее конкретные результаты получаются для предельного случая расстояний между приемниками, больших по сравнению с корреляционным радиусом. А. С. Монин

9 В207. Рассеяние плоских волн локально однородными флуктуациями показателя преломления. Silverman R. A. Scattering of plane waves by locally homogeneous dielectric noise. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1958, **54**, № 4, 530—537 (англ.)

Рассматривается вопрос о рассеянии плоской волны (акустической или электромагнитной) на флуктуациях показателя преломления. Для достаточно далеких от рассеивающей среды расстояний (в зоне Фраунгофера) и для случая локально однородного случайного поля (л. о. с. п.) флуктуаций получены приближенные выражения для функции корреляции рассеянного поля. Понятие л. о. с. п. основано на введенном в предыдущих работах автора понятии локально стационарного случайного процесса, обобщающем понятие обычного стационарного процесса. В. Ф. Писаренко

9 В208. Определение одномерной плотности распределения и моментов случайного процесса на выходе существенно нелинейной системы. Хазен Э. М. «Теория вероятностей и ее применения», 1961, **6**, № 1, 130—138 (рез. англ.)

Пусть $L(p)$ — рациональная функция аргумента p; $p = \frac{d}{dt}$. Рассматривается уравнение $v(t) = X(t) - L(p) f(v(t))$, где $X(t) = m(t) + \xi(t)$ для $t > t_0$ и $X(t) = 0$ при $t \leqslant t_0$ ($m(t)$ — известная функция времени, $\xi(t)$ — гауссовский стационарный процесс с рациональной спектральной плотностью). В работе изучается задача определения плотности распределения и моментов случайного процесса $v(t)$. Процесс $v(t)$ рассматривается как компонента многомерного диффузионного процесса, для плотности распределения вероятностей которого выписывается уравнение Колмогорова. В случае разрывных коэффициентов указаны дополнительные условия на линиях разрыва, которые обеспечивают единственность решения. Рассмотрены примеры.

Р. З. Хасьминский

9 В209. Теория статистического планирования дискретных систем, контролирующих непрерывные процессы. Chang S. S. L. Statistical design theory for digi-

tal-controlled continuous systems. «Applic. and Ind.», 1958, № 38, 191—198. Discuss., 198—201 (англ.)

Рассматриваются вопросы практического планирования контролирующих устройств, которые для осуществления контроля над непрерывными процессами получают данные об этих процессах лишь в дискретные моменты времени. В качестве критерия качества контроля берется интеграл от квадрата ошибки (для неслучайных процессов) или же математическое ожидание квадрата ошибки (для случайных процессов). В. Ф. Писаренко

9 В210. О графическом анализе автоматических контрольных систем, содержащих асимметричные нелинейные элементы при стационарном случайном входе. Саварагги Й., Сугаи Н., Кимура М. «Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs», 1960, **26**, № 170, 1451—1460 (японск.; рез. англ.)

Описываются два графических метода анализа автоматических контрольных систем, содержащих асимметричные нелинейные элементы с нулевой памятью при стационарном случайном входе, распределенном нормально со средним нуль. Методы принадлежат следующим двум типам. Сначала мы предполагаем, что вход с нелинейного элемента содержит стационарное случайное слагаемое и постоянное слагаемое. Но если линейная часть контрольной системы имеет чистую интегральную характеристику, сделанное выше предположение становится неразумным. Затем мы предполагаем, что вход, содержащий нелинейные элементы, состоит из двух случайных слагаемых, одно с нормальным распределением, а другое с спектральной плотностью, сосредоточенной около нулевой частоты. Приводится один пример, позволяющий сравнить результаты, полученные двумя указанными выше методами. Резюме автора

9 В211. Статистический и переходный подход к контрольным системам выборочных данных. Мори. «Токё дайгаку сэйсан гидзюцу кэнкюсё хококу, Rept. Inst. Industr. Sci. Univ. Tokyo», 1958, **7**, № 3, pp. 108—179, ill. (японск.)

9 В212. Одна предельная теорема теории вероятностей и ее применение к обобщению теории очередей. Finch P. D. A probability limit theorem with application to a generalisation of queueing theory. «Acta math. Acad. scient. hung.», 1959, **10**, № 3-4, 317—325 (англ.; рез. русск.)

Основной результат работы состоит в следующем. Пусть $\{u_r\}$ и $\{v_r\}$ есть не зависящие друг от друга последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $U(x)$ и $V(x)$ соответственно и конечными средними. Пусть, далее, величины v_r неотрицательны. Определим последовательность неотрицательных случайных величин $\{w_r\}$ с помощью рекуррентного соотношения

$$w_{r+1}=\begin{cases} w_r+u_r, & \text{если } w_r+u_r>0,\\ v_{r+1}, & \text{если } w_r+u_r\leqslant 0, \end{cases} \quad r=0,1,2,\ldots,$$

где w_0 есть данная неотрицательная случайная величина. Если $W_r(x)$ есть функция распределения величины w_r, то существует $\lim\limits_{r\to\infty} W_r(x)=W(x)$. Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dU(x)\geqslant 0$, то $W(x)\equiv 0$; далее, если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dU(x)<0$, тогда $W(x)$ есть функция распределения неотрицательной случайной величины, которая не зависит от w_0, и является решением интегрального уравнения

$$W(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} W(x-y)\,dU(y)-$$

$$-(1-V(x))\int\limits_{-\infty}^{x} W(-y)\,dU(y),\quad (x>0).$$

Эта теорема является обобщением результата Линдлея, который рассматривал случай $v_r\equiv 0$. Она позволяет построить теорию очереди в системе, где обслуживающий прибор, если он свободен, начинает обслуживание со случайной задержкой V_r. Для таких систем получено обобщение известной формулы Поллячека для характеристической функции предельного распределения времени ожидания, когда процесс на входе является пуассоновским. Б. М. Клобс

9 В213. Применение метода разностных уравнений к задаче о простой очереди. Conolly B. W. A difference equation technique applied to the simple queue. «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, **B20**, № 1, 165—167 (англ.)

В одноканальную систему с показательным временем обслуживания со средним μ^{-1} поступает пуассоновский поток с интенсивностью λ. Требования, заставшие канал занятым, становятся в очередь. Пусть $n(t)$ — общее число требований, находящихся в системе в момент t, включая требование, проходящее обслуживание. $p_n(t)=P\{n(t)=n\mid n(0)=a\}$ являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а преобразования Лапласа $p_n^*(u)=\int\limits_0^\infty e^{-ut}p_n(t)\,dt$ удовлетворяют уравнению в конечных разностях второго порядка, решение которого имеет вид:

$$p_n^*(u)=\begin{cases}[\alpha^n+(1-\beta)\beta^n(\alpha-1)^{-1}](r\alpha^a)^{-1}, & n\leqslant a,\\ [\beta^{-a}+(1-\beta)\{(\alpha-1)\alpha^a\}^{-1}]\beta^n r^{-1}, & n\geqslant a,\end{cases}$$

где $2\mu\alpha=u+\lambda+\mu+r$, $2\mu\beta=u+\lambda+\mu-r$, $r^2=(u+\lambda+\mu)^2=4\lambda\mu$. Ю. К. Беляев

9 В214. Решение уравнений в случае непрерывного времени для одноканальной системы с очередью для общего класса распределений времени обслуживания методом производящих функций. Luchak George. The continuous time solution of the equations of the single channel queue with a general class of service-time distributions by the method of generating functions. «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, **B20**, № 1, 176—181 (англ.)

Входящий поток требований предполагается пуассоновским с интенсивностью λ. Плотность распределения времени обслуживания у каждого требования равна

$$\sum_{m\geqslant 1} c_m\frac{\mu^m t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\mu t},\quad t\geqslant 0.$$

Таким образом время обслуживания с вероятностью c_m состоит из m взаимно независимых фаз, каждая из которых имеет показательное распределение со средним μ^{-1}. Если $P_k(t)$ — вероятность того, что к моменту t в системе находится некоторое число требований, для которых общее число необходимых фаз обслуживания равно k, $P_a(0)=1$, то для

$$\Pi^*(z,s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\left[\sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m(t)\right]dt$$

из системы дифференциальных уравнений, решением которых являются $P_k(t)$, получают

$$\Pi^*(z,s)=\frac{z^{a+1}+\mu(z-1)P_0^*(s)}{(\lambda+\mu+s)z-\mu-\lambda z\sum\limits_{m=1}^{\infty}c_m z^m}.$$

Так как $\Pi^*(z,s)$ сходится в круге $|z|=1$ для $\operatorname{Re} s>0$, то

$$P_0^*(s)=\frac{\xi^{a+1}}{\mu(1-\xi)},\qquad (1)$$

где ξ, $|\xi|<1$, — корень уравнения

$$(\lambda+\mu+s)\cdot z-\mu-\lambda z\sum_{m=1}^{\infty}c_m z^m=0.$$

Предлагается следующая методика отыскания обратного преобразования Лапласа для (1):

$$\xi^{\sigma}=\zeta^{\sigma}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}b_{n,m}\frac{(m+2n+\sigma-1)!}{(m+n+\sigma)!}\cdot\zeta^{m+2n+\sigma},$$

где $b_{n,m}$ находятся из соотношений

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}c_m\zeta^{m-1}\right)^n=\sum_{m=0}^{\infty}b_{n,m}\zeta^m,$$

а $\rho=\lambda/\mu$, $\zeta=\frac{\mu}{\lambda+\mu+s}$. Таким образом для $\tau=\mu t$

$$P_0(t)=\frac{1}{\tau}\sum_{\sigma=a+1}^{\infty}\cdot\sigma\left\{\frac{\tau^{\sigma}}{\sigma!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\rho\tau)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}b_{n,m}\frac{\tau^{m+n+\sigma}}{(m+n+\sigma)!}\right\}e^{-(1+\rho)\tau}.$$

Через $P_0(t)$ можно выразить значения вероятностей, а также различные моменты для длины очереди. Например, средняя длина очереди:

$$m_1(t)=a+\left(\lambda\sum_{m=1}^{\infty}mc_m-\mu\right)t+\mu\int_0^t P_0(y)\,dy,$$

получается как обращение преобразования Лапласа от $\left.\frac{\partial\Pi^*(z,s)}{\partial z}\right|_{z=1}$; среднее время ожидания $w(t)=\frac{m_1(t)}{\mu}$. Вычисляется также плотность вероятностей для распределения длительности периодов занятости, которая равна

$$\frac{a\mu}{\tau}\left[\frac{\tau^a}{a!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\rho\tau)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}b_{n,m}\frac{\tau^{m+n+a}}{(m+n+a)!}\right]e^{-(1+\rho)\tau}.$$

В качестве примеров рассмотрены частные случаи: $c_k=1$, $c_j=0$ $(j\neq k)$ и $c_k=\alpha$, $c_{k+p}=\beta$, $c_j=0$ $(j\neq k,\ j\neq k+p)$, $\alpha+\beta=1$. Ю. К. Беляев

9 В215. Об интегро-дифференциальном уравнении Такача. II. Reich Edgar. On the integrodifferential equation of Takács. II. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 1, 143—148 (англ.)

Продолжается (РЖМат, 1959, 11287) изучение свойств вероятности $F(t)$ отсутствия очереди в момент t, если поток клиентов пуассоновский с переменной плотностью, а время обслуживания произвольно. Исследуется поведение $F(t)$ при больших t, в частности при условиях, гарантирующих, что $F(t)$ не стремится к нулю. В этих условиях получено асимптотическое представление величины $\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt$ при больших T. Б. М. Клосс

9 В216. Выходящий поток у системы с очередью. Burke P. J. The output of a quening system. «Operat. Res.», 1956, **4**, № 6, 699—704 (англ.)

Если в s-канальную систему массового обслуживания с очередью поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ, время обслуживания каждого требования имеет показательное распределение со средним $\frac{1}{\mu}$, то при $\frac{\lambda}{s\mu}<1$ моменты окончаний обслуживания требований образуют пуассоновский поток с той же интенсивностью λ. Доказательство элементарное. Указаны возможные приложения этого результата. Ю. К. Беляев

9 В217. О совместной задаче ожидания и потерь для потока телефонных вызовов. Takács L. On a combined waiting time and loss problem concerning telephone traffic. «Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math.», 1958, **1**, 73—82 (англ.)

Рассматривается m-канальная система, в которую в моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots$ поступают вызовы. Интервалы между последовательными поступлениями вызовов, а также длительности разговоров являются взаимно независимыми одинаково распределенными случайными величинами, функции распределения которых равны соответственно $F(x)$, где $a=\int_0^{\infty}x\,dF(x)<\infty$, и $H(x)=1-e^{-\mu x}$, $x\geqslant 0$.

Вызовы, заставшие свободным хотя бы один из каналов, немедленно принимаются к обслуживанию (полнодоступный пучок линий). Вызовы, заставшие все каналы занятыми, становятся в очередь, если число ожидающих меньше $w\geqslant 0$, если же число ожидающих больше w, то вызовы теряются. Пусть $\eta(t)$ — число требований, находящихся в системе в момент t. В работе доказывается, что для нерешетчатого распределения $F(x)$ существуют пределы $\lim_{n\to\infty}P\{\eta(\tau_n-0)=k\}=P_k$ и $\lim_{t\to\infty}P\{\eta(t)=k\}=P_k^*$. Выписываются весьма громоздкие явные выражения для этих пределов, а также для функции распределения времени ожидания. Ю. К. Беляев

9 В218. Влияние размера комнаты для ожидания на простую очередь. Finch P. D. The effect of the size of the waiting room on a simple queue. «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, **B20**, № 1, 182—186 (англ.)

Рассматривается одноканальная система с произвольной функцией распределения длительностей обслуживания $B(s)$ и пуассоновским входящим потоком. Требование, заставшее канал свободным, немедленно принимается к обслуживанию. В противном случае требование становится в очередь, однако требования, поступающие в те моменты, когда в системе находится $N+1$ требование, теряются. Если s_r — момент окончания обслуживания r-го требования, а $n(t)$ — число требований, находящихся в системе, то для $P_k^r=P\{n(s_r+0)=k\}$ составляются рекуррентные уравнения, например, для n, $0<n<N+1$,

$$P_n^{r+1}=P_{n+1}^r k_0+P_n^r k_1+\ldots+$$

$$+P_2^r k_{n-1}+\left(P_1^r+P_0^r\right)k_n,$$

где $k_r=\frac{1}{r!}\int_0^{\infty}e^{-\lambda s}(\lambda s)^r dB(s)$ — вероятность поступления в систему r требований за время обслуживания очередного требования. Случайный процесс $n_r=n(s_r+0)$ образует неприводимую апериодическую цепь Маркова. Следовательно, существуют пределы $\lim_{r\to\infty}P_n^r=P_n$. В случае показательного времени обслуживания со средним $\frac{1}{\mu}$

$$P_n=\frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{N+2}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n,$$

$$n=0,\ldots,N+1,\ \lambda\neq\mu;\ P_n=\frac{1}{N+2},\ \lambda=\mu.$$

В этом частном случае также найдено распределение времени ожидания.

Примечание референта. Более общая задача была рассмотрена Такачем (реф. 9В217). Ю. К. Беляев

9 В219. К теории очередей с различными типами дисциплины. Homma T. On the theory of queues with some types of queue discipline. «Yokohama Math. J.», 1956, 4, № 1, 55—64 (англ.)

Изучаются вопросы, связанные с существованием стационарнсто распределения для длины очереди в одноканальной системе массового обслуживания. Входящий поток клиентов пуассоновский с параметром λ. Функция распределения времени обслуживания произвольна с конечным средним, равным $\frac{1}{b}$. Рассмотрены два типа дисциплины очереди. В первом случае в каждый из моментов начала обслуживания очередного клиента с вероятностью $w_r \geqslant 0$, $r=1,\ldots,\kappa$, из очереди могут уйти r стоящих в ней клиентов. Необходимое и достатсчное условие эргодичности вложенной цепи Маркова, задающей число требований в системе в моменты начала обслуживания, состоит в том, чтобы

$$\rho = \frac{\lambda}{b} - \sum_{r=1}^{k} r w_r < 1.$$

Во втором случае $w_0 = 1$, но в каждый из моментов поступления число вновь прибывших клиентов равно j с вероятностью c_j, т. е. входящий поток — это неординарный стационарный поток с отсутствием последействия. В этом случае необходимое и достаточное условие для эргодичности определенной выше вложенной цепи Маркова состоит в том, чтобы

$$E = \frac{\lambda}{b}\left(\sum_{j=1}^{\infty} j c_j\right) < 1.$$

Для случая $\rho = 1$ ($E = 1$) все состояния вложенной цепи нулевые, при $\rho > 1$ ($E > 1$) невозвратные.

Ю. К. Беляев

9 В220. Последовательные линии с ожиданием. Hunt G. C. Sequential arrays of waiting lines. «Operat. Res.», 1956, 4, № 6, 674—683

Рассмотрены вопросы, связанные с последовательностью станков, перед которыми могут стоять бункера бесконечной емкости. Псток изделий, поступающих на обработку, предполагается пуассоновским, а время обработки каждого изделия — случайная величина, имеющая показательное распределение. Для ряда частных случаев вычисляется отношение минимально возможного (без нарушения статистического равновесия) среднего времени между последовательными моментами поступления изделий к среднему времени прохождения изделий через линию. Ю. К. Беляев

9 В221. Очереди у светофора с постоянным циклом. Newell G. F. Queues for a fixedcycle traffic light. «Ann. Math. Statistics», 1960, 31, № 3, 589—597 (англ.)

Изучается стохастическая модель потока автомобилей через перекресток, регулируемый двухцветным светофором. Предполагается, что появление нового автомобиля перед светофором или уход автомобиля от него может происходить лишь в дискретные «моменты» (отрезки времени одинаковой продолжительности) и что светофор работает циклически: сначала r моментов времени горит красный цвет, а затем g моментов времени — зеленый. В каждый момент времени с вероятностью α может появиться и с вероятностью $1-\alpha$ не появиться новый автомобиль. При красном свете ни один автомобиль не может покинуть перекресток, а при зеленом свете лишь один автомобиль пересекает перекресток в течение одного отрезка времени. В этих предположениях длина очереди описывается нестационарной цепью Маркова: в «красный» момент времени очередь возрастает на единицу с вероятностью α и не меняется с вероятностью $1-\alpha$; в «зеленый» момент времени с вероятностью α непустая очередь не меняется и с вероятностью $1-\alpha$ уменьшается на единицу. Однако длина очереди, взятая в моменты времени, соответствующие началу цикла работы светофора, описывается уже стационарной цепью Маркова. Если q_x — длина очереди перед началом x-го цикла, то $q_{x+1} = \max\{q_x + u_x - g, 0\}$, где u_x представляет общее число автомобилей, появившихся за время x-го цикла, так что

$$P\{u_x = m\} = \binom{r+g}{m}(1-\alpha)^{r+g-m}\alpha^m.$$

Большая часть статьи посвящена отысканию стационарного распределения длины очереди при различных соотношениях между параметрами r, g и α. В частности, получено несколько асимптотических выражений для среднего значения $E(q_x)$. В. М. Волков

9 В222. Внутризаводское хранение в непрерывном производстве. Miller H. D. Inter-plant storage in continuous manufacturing. «Technometrics», 1960, 2, № 3, 393—401 (англ.)

Непрерывно действующая установка A направляет свою продукцию в хранилище, из которого снабжается другая непрерывно действующая установка B. Для исследования режима наполнения хранилища привлекается аппарат конечных цепей Маркова. В дальнейшем предполагается, что время t, наполнение хранилища S_t, продукция установки A a_t и потребление установки B b_t принимают дискретные значения: $t = 0, 1, 2, \ldots$; $S_t = 0, 1, 2, \ldots, N$; $a_t = 0, 1, 2, \ldots, a$; $b_t = 0, 1, 2, \ldots, b$. Наполнение хранилища S_t и производительность установок A и B связаны соотношением:

$$S_t = S_{t-1} + a_t - b_t.$$

Стохастическая связь между S_t и S_{t-1} описывается матрицей переходных вероятностей $P_t = \| p_t(i, j) \|$, где $p_t(i, j) = P(S_t = j / S_{t-1} = i) = P(a_t - b_t = j - i / S_{t-1} = i)$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots, N$. Из-за циклического характера производства матрицы P_t также предполагаются периодическими с периодом T, т. е. $P_t = P_{t+T}$. Пусть

$$Q_t = P_{t+1}P_{t+2}\ldots P_T P_1 \ldots P_t;$$

исследуется предельное распределение для наполнения хранилища, определяемое из уравнения

$$x_t = x_t Q(t),$$

и вычисляемые при его помощи технические характеристики производственного процесса. П. А. Строганов

9 В223. Сумма случайного числа случайных членов; приложение к задаче складирования. Roy B. Somme d'un nombre aléatoire de termes aléatoires, application aux problèmes de stockage. «Rev. statist. appl.», 1960, 8, № 1, 51—60 (франц.)

Пусть

$$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i;$$

X_i — независимые случайные величины с одинаковым распределением; N — случайная величина, не зависимая от последовательности X_i. Дается численный пример аппроксимации (с оценкой точности) распределения Z тремя или четырьмя первыми членами разложения Грама — Шарлье в случае, когда N следует пуассоновскому закону, а X_i — гауссовскому или показательному. Описано приложение этой аппроксимации к расчету оптимального запаса обсадных труб. S. Zubrzycki

9 В224. Математические вопросы проблемы надежности. Drenick R. F. Mathematical aspects of the reliability problem. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1960, 8, № 1, 125—149 (англ.)

Рассматривается экономический подход к понятию надежности. Приведены элементарные сведения из теории восстановления. Предполагается, что моменты по-

ломок $\{t_i\}$ образуют процесс восстановления (т. е. промежутки между ними независимы и одинаково распределены). Если за время t в моменты $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t$ произошло n поломок, то общий убыток задается функцией $W_n(t_1, \ldots, t_n, t)$. В том случае, когда

$$W_n(t_1, \ldots, t_n t) = \sum_{i=1}^{n} W(t_i - t_{i-1}) + W_0(t - t_n),$$

средний убыток $U(t)$ от поломок за время t является решением интегрального уравнения

$$U(t) = \int_0^t W(x)\, dF(x) + W_0(t)\,[1 - F(t)] + U(t) * F(t)$$

$$F(t) = P\{t_{i+1} - t_i < x\}.$$

Изучается асимптотическое поведение $U(t)/t$ при $t \to \infty$ (см. также Feller W., Ann. Math. Statistics, 1941, **12**, 243—267). Дан ряд частных примеров. Приведены формулы для убытка, когда работа прибора прекращается после фиксированного числа поломок. Отмечается, что в качестве моделей, интерпретирующих постепенное изменение параметров элементов (старение), часто можно рассматривать случайные процессы $x(t)$ с монотонно убывающими траекториями такие, что

$$P\{x(t) > x\} = \exp\{-\lambda(x)\, g(t)\}.$$

Проведение профилактических мер можно осуществлять двумя способами: проводить их регулярно через выбранный заранее промежуток времени, или сначала измерять некоторые параметры системы, которые постепенно меняются в результате старения оборудования, а затем решать вопрос о проведении таких мер. Эти способы профилактики иллюстрируются на примерах. В заключение рассмотрен специальный случай двух дублированных машин, с учетом возможности устранения возникающих в них поломок. Библиография содержит 18 источников. Имеются опечатки.

Примечание референта. По общим вопросам теории восстановления см. РЖМат, 1959, 11288.

Ю. К. Беляев

9 В225. Байесовские выборочные процедуры приемки для больших партий. Guthrie D., Jr, Johns M. V., Jr. Bayes acceptance sampling procedures for large lots. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 896—925 (англ.)

Величины X_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, соответствующие качеству i-го изделия в партии (например, X_i может быть числом дефектов в i-м изделии), предполагаются независимыми, неотрицательными случайными величинами с одинаковым распределением, зависящим от параметра λ. В партии производится случайная выборка для инспекции объема n. Пусть S_n и S_N — суммы значений X_i для выборки и всей партии соответственно.

$$a_1(S_N - S_n) + a_2(N - n) + s_1 S_n + s_2 n -$$

потеря от приемки непроинспектированной части партии и

$$r_1(S_N - S_n) + r_2(N - n) + s_1 S_n + s_2 n -$$

потеря от браковки. Вводятся некоторые правдоподобные предположения о распределении X_i и априорного распределения λ. Для заданного n автор получает решающее правило: принять непроинспектированный остаток партии в том и только в том случае, если

$$E(\lambda \mid S_n) \leqslant (r_2 - a_2)/(a_1 - r_1).$$

Приводятся асимптотические выражения для критических значений S_n. Исследуется объем выборки, при котором минимизируется риск.

K. Sarkadi

9 В226. О выборочных планах инспекции. Suzuki Yukio. On sampling inspection plans. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, **11**, № 2, 71—79 (англ.)

Пусть (n, c) обозначает план статистического контроля, в котором n — объем выборки, c — допустимое число дефектных в выборке. Пусть, далее, $F(p)$ — известная функция априорного распределения доли p дефектных в партии; потери, связанные с приемкой и браковкой партии, определяют монотонные функции p: $L_1(p)$ и $L_2(p)$; $L_1(p)$ $(L_2(p))$ монотонно возрастает (убывает) и $L_1(0) = L_2(1) = 0$; S_n есть стоимость выборки; число дефектных в выборке имеет гипергеометрическое распределение, поэтому известна и оперативная характеристика плана. Из этих предположений и теорем Байеса можно найти ожидаемый риск $R(n, c)$, связанный с применением плана (n, c). Автор находит n и c, минимизирующие $R(n, c) + S(n)$. Например, для фиксированного n дается способ нахождения значения $c = i(n)$, минимизирующего $R(n, c)$. Этот способ остается в силе и при аппроксимации гипергеометрического распределения биномиальными при большом объеме партии. Наконец, предполагая, что $L_1(p) = cp^{\nu}$, $L_2(p) = \beta(1-p)^{\nu}$, а $F(p)$ — бета-распределение, автор находит выражение для $i_0(n)$. Однако нахождение оптимального значения n требует численных расчетов.

J. Oderfeld

9 В227. Метод многоступенчатого выборочного контроля в серийном производстве. Миками Мисао. «Кюсю дайгаку когаку сюхо, Technol. Repts Kyushu Univ.», 1956, **29**, № 3, 127—132 (японск.)

Некоторая совокупность состоит из ряда совершенно одинаковых групп по N деталей. Предполагается, что в процессе испытаний деталь может разрушаться или оставаться целой, и рассматривается следующий способ контроля. Первоначально берется $n_0 = Nf_0$ деталей, которые подвергаются проверке. Если она даст положительные результаты, то берется еще $n_0 = Nf_0$ деталей и так повторяется i_0 раз. В случае отсутствия брака переходят к следующей ступени, которая характеризуется выборкой в $n_1 = Nf_1$ штук и числом повторений i_1 раз. Вообще j-я ступень контроля характеризуется двумя числами $n_j = Nf_j$ и i_j. Принимается следующее основное правило: При положительном исходе от j-й ступени переходят к $(j+1)$-й, при отрицательном, т. е. обнаружении хотя бы одной бракованной детали, вся группа бракуется и возвращается к $(j-1)$-й ступени. Числа n_j выбираются в убывающем порядке

$$1 \geqslant f_0 \geqslant f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_k > 0$$

на основании того, что с переходом к следующей ступени растет информация, а с ней и надежность контроля. В предположении наличия в совокупности доли p брака вычисляются вероятности перехода от одной ступени к другой и устанавливается, что пребывание в j-й ступени контроля может быть истолковано как j-е состояние в цепи Маркова. Все дальнейшее изучение, которое должно служить рациональному выбору чисел f_j и i_j, проводится с помощью аппарата цепей Маркова. В заключение дается оценка степени риска потребителя и производителя при этом методе контроля. Автор намерен развить изложенные идеи в следующих работах.

Примечание референта. 1. На стр. 129 следует читать $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{g_j^{(n)}}{n} - P_j\right| > \varepsilon\right) = 0$. 2. На стр. 130 следует читать $P_1' = P_0' i_0' + P_2'\left(1 - P_2^{i_2}\right)$.

А. М. Бендерский

9 В228. Эффективность плана выборочного контроля. Moriguti Sigeiti. Efficiency of a sampling inspection plan. «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan Scientists and Engrs», 1956, **4**, № 3, 71—77 (англ.)

Рассматривается план выборочного контроля, основанный на случайном числе n наблюдений последовательности независимых величин с плотностью $f_0(x)$. В качестве критерия его эффективности рассматривается отношение

$$\eta = \frac{1}{L(1-L)}\left(\frac{dL}{d\theta}\right)^2 \frac{1}{I} \Big/ E_\theta(n),$$

в котором $L(\theta)$ — оперативная характеристика (т. е. вероятность принять партию, когда истинное значение параметра есть θ), а

$$I = E_\theta\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f_\theta(x)\right) = E_\theta\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_\theta(x)^2\right)\right\}$$

— величина информации по Фишеру. Использование такой меры эффективности обосновывается неравенством $\eta \leqslant 1$, доказанным в предположении, что процедура контроля заканчивается после конечного числа шагов и $E_0(n)$ конечно. Для значения θ, при котором $L(\theta) = \frac{1}{2}$, высокая эффективность, близкая к 100%, может быть только в случае последовательного контроля. Во всех остальных случаях она получается меньшей, в частности, в случае простого контроля параметра биномиального распределения θ и среднего нормального распределения $\eta = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$. А. М. Бендерский

9 В229. Метод статистического контроля качества продукции, основанный на индивидуальных выборочных значениях. Zaludova A. H., Mme. Méthode de contrôle statistique de qualité basée sur les valeurs individuelles de l'échantillon. «Rev. statist. appl.», 1958, **6**, № 4, 21—31 (франц.)

Рассматривается схема производственного контроля качества продукции по некоторому параметру. Предполагается, что результаты наблюдений представляют собой значения случайной величины, распределенной нормально (μ, σ). Производится n независимых наблюдений x_i, $i = 1, \ldots, n$. Пусть числа x_{2U}, x_{1U} таковы, что $\mu < x_{2U} < x_{1U}$; и пусть $x_{1L} = 2\mu - x_{1U}$; $x_{2L} = 2\mu - x_{2U}$. Обозначим: $I_1:(-\infty, x_{1L})$; $I_2:(x_{1L}, x_{2L})$; $I_3:(x_{2L}, x_{2U})$; $I_4:(x_{2U}, x_{1U})$; $I_5:(x_{1U}, +\infty)$; A — событие, заключающееся в том, что ни одно из x_i не попало ни в I_1, ни в I_5, а в каждый из интервалов I_2 и I_4 попало не более одного наблюдения; B — событие, заключающееся в том, что не более чем одно из x_i превосходит x_{2U}. Задав уровни значимости α' и α, из уравнений $P(A) = 1 - \alpha$ и $P(B) = 1 - \alpha'$, определяем $x_{1U}, x_{2U}, x_{1L}, x_{2L}$. Если в наблюдении осуществляется событие A, считаем, что производственный процесс протекает нормально. В противном случае следует отыскать и устранить неисправность. Проводится анализ эффективности данного метода. Л. Н. Куцев

9 В230. Замечание к одному методу контроля, основанному на экстремальных значениях выборки. Chartier F. Note sur une méthode de contrôle basée sur les valeurs extrêmes de l'échantillon. «Rev. statist. appl.», 1958, **6**, № 4, 33—36 (франц.)

Рассматривается критерий для проверки гипотезы $H_0: x$ нормально (0,1) при альтернативе $H_1: x$ нормально $(\lambda, 1)$, $\lambda \neq 0$, основанный на процедуре Залудовой (реф. 9В229). Л. Н. Куцев

9 В231. Выборочный план приемки с целью проверки долговечности. Sobel, Tischendorf J. A. Acceptance sampling with new life test objectives. «Proc. 5th Nat. Sympos. Reliabil. and Qual. Control Electron (1959, Philadelphia, Pa)». New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, 1959, 108—118 (англ.)

Пусть долговечность изделий — случайная величина с экспоненциальной функцией распределения. Рассматривается следующая процедура приема партии. В течение фиксированного времени t выборка изделий объема n подвергается эксплуатации. Устанавливается количество изделий, пришедших в негодность. Если это количество превышает некоторое заданное число c, то партия бракуется, в противном случае партия принимается. При заданных c и P^* приводятся таблицы для определения n, обеспечивающих с вероятностью, не меньшей чем P^*, приемку партий изделий со средней долговечностью, не меньшей чем Θ_0. Рассматривается и другая задача. Пусть построены таблицы для определения n в зависимости от t/Θ_0 и c при некотором P^*. Требуется определить, какие требования следует предъявить к качеству изделий, т. е. какой должна быть нижняя граница их средней долговечности Θ, чтобы партия принималась с вероятностью не ниже P^{**}, где P^{**} задана и $P^{**} > P^*$ (это случай, когда убыток вследствие признания партии непригодной велик). Приводится таблица для $P^{**} = 0{,}95$ при $P^* = 0{,}9$. Работа содержит приложение, дающее математическое обоснование способа построения таблиц. Б. В. Финкельштейн

9 В232. Тесты значимости для определения влияния износа на порчу. Smith John H. Significance tests of effects of wear out failures. «Proc. 5th Nat. Sympos. Reliabil. and Qual. Control Electron.» (1959, Philadelphia, Pa). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, 1959, 103—107 (англ.)

Статистические критерии проверки гипотез рекомендуется использовать для проверки зависимости от возраста вероятности порчи некоторых элементов машины. Сравниваются различные критерии. Результаты испытаний можно использовать для решения вопроса целесообразности периодических замен элементов. Б. В. Финкельштейн

9 В233. К вопросу об эффективности приемочного контроля. Ронжин В. И., «Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР», 1957, вып. 20, 83—84

Если равные по объему партии готовой продукции содержат одинаковые количества дефектных изделий, то потребитель должен, очевидно, либо принять очередную партию, либо забраковать (без контроля). Всякий другой план приемки, с точки зрения здравого смысла, будет в этом случае менее эффективным. Автор показывает, что к такому же выводу приводит характеристика эффективности приемки, предложенная Эйдельнантом (РЖМат, 1961, 4В183). Л. Н. Большев

9 В234. Теоретико-вероятностные основы статистического метода расчета электрических нагрузок промышленных предприятий. Гнеденко Б. В. «Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика», 1961, № 1, 90—99

Обзор, написанный на доступном уровне. Используется центральная предельная теорема, элементы теории случайных процессов. Р. Л. Добрушин

9 В235. Новые пути развития теории ошибок. Böhm Josef. Neue Wege in der Fehlertheorie. «Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden», 1959—1960, **9**, № 2, 309—315 (нем.)

Приводятся некоторые рекомендации по использованию математико-статистических методов в практике геодезических измерений. Н. В. Смирнов

9 В236. Обратная связь в физиологических системах (приложение анализа обратной связи и стохастических моделей к нейрофизиологии). Adolph Alan R. Feedback in physiological systems: an application of feedback analysis and stochastic models to neurophysiology. «Bull. Math. Biophys.», 1959, **21**, № 2, 195—216 (англ.)

Антагонистическая система сгибающей и разгибающей мышц ноги человека является типичным примером нейрофизиологической системы обратной связи. После краткого введения в нейроанатомию и физиологию этой обратной связи дается аналитическое выражение для функций передачи. Анализ, базирующийся на обобщенном критерии Найквиста, свидетельствует об устойчивом поведении системы. Далее приводятся выражения для чувствительности системы к изменениям реакций мышц и сухожилия. Явления, имеющие место в синапсах и нервных окончаниях при умеренных сгибах ноги,

трактуются как стохастические процессы с шумами. Получено спектральное представление этих процессов. Аналитические результаты применяются к объяснению некоторых патологических случаев. С. С. Кислицын

9 В237. Элементы теории крайних значений. Epstein Benjamin. Elements of the theory of extreme values. «Technometrics», 1960, 2, № 1, 27—41 (англ.)

Теория крайних значений находит многочисленные применения в современной технологии. Предлагаемая работа посвящена изложению основных элементов этой теории. Многочисленные примеры иллюстрируют происхождение вводимых понятий и их использование.

Резюме автора

9 В238. Оценки для распределения Пуассона в случае, когда выборочное значение $c+1$ иногда ошибочно воспринимается как c. Cohen A., Clifford Jr. Estimation in the Poisson distribution when sample values of $c+1$ are sometimes erroneously reported as c. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1960, **11**, № 3, 189—193 (англ.)

Выводятся выражения оценок максимального правдоподобия λ^* и θ^* для параметров λ и θ распределения

$$p(x;\lambda,\theta)=\begin{cases} e^{-\lambda}\lambda^x/x!, & x=0,1,\ldots,(c-1),(c+2),\ldots \\ [e^{-\lambda}\lambda^c/c!]\,[1+\lambda\theta/(c+1)], & x=c, \\ (1-\theta)\,e^{-\lambda}\lambda^{c+1}/(c+1)!, & x=c+1. \end{cases} \quad (1)$$

Даются также выражения для отыскания дисперсий и ковариаций оценок λ^* и θ^*. В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрен числовой пример, связанный с контролем и приемкой изделий, когда число дефектных изделий имеет распределение Пуассона с параметром λ, а θ есть вероятность неправильной классификации, когда вместо $c+1$ насчитывается c дефектных изделий. Тогда число насчитанных дефектных изделий имеет распределение (1). Л. Д. Фельдман

9 В239. Логистический процесс, таблицы стохастических эпидемических кривых и приложения. Mansfield Edwin, Hensley Carlton. The logistic process: tables of the stochastic epidemic curve and applications. «J. Roy. Statist. Soc.», 1960, **B22**, № 2, 332—337 (англ.)

Логистический процесс (т. е. марковский процесс с состоянием $1,2,\ldots,n$ и плотностью вероятностей перехода из s в $s+1$, равной $s(n-s+1)$), как известно, является простейшим стохастическим процессом, употребляющимся для описания течения эпидемии в замкнутой группе индивидуумов. Авторы получают систему разностно-дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет вероятность $P_s(t)$ того, что в момент времени t в группе из n индивидуумов будет s здоровых индивидуумов. Затем они приводят выражение для математического ожидания числа заболевших к моменту t индивидуумов $m(t)=n+1-\sum_{s=0}^{n} sP_s(t)$ и вводят в рассмотрение так называемую эпидемическую кривую $z(t)=dm(t)/dt$, характеризующую течение эпидемии во времени. Главный результат работы—получение с помощью счетной машины ИБМ-650 трех таблиц, дающих значения $z(t)$ для $n=5-10$, $n=11-20$ и $n=21-40$. В. М. Волков

9 В240. Серии растворов: один статистический критерий качества техники. Stevens W. L. Dilution series: a statistical test of technique. «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, **B20**, № 1, 205—214 (англ.)

Приготовляются растворы данной культуры микроорганизмов, концентрации которых убывают в геометрической прогрессии. Раствором каждой концентрации наполняют m пробирок и определяют, какие пробирки оказались зараженными, а какие — стерильными. Возникает вопрос о статистической проверке гипотезы, состоящей в том, что не произошло случайных заражений или стерилизаций пробирок, т. е. растворы приготовлены правильно. Предлагается следующий тест: пусть при концентрациях с номерами $\leqslant i$ заражены все m пробирок, а при концентрациях с номерами $\geqslant j$ все пробирки оказались стерильными. Положим $R=j-i$. Будем считать, что если R велико, то опыт произведен неправильно, а если R мало — правильно. При некоторых предположениях относительно вероятности заражения раствором данной концентрации распределение R табулировано. В. Н. Тутубалин

9 В241. Оценки максимального правдоподобия для компонент генетической изменчивости. Hayman B. I. Maximum likelihood estimation of genetic components of variation. «Biometrics», 1960, **16**, № 3, 369—381 (англ.)

Математические ожидания дисперсий и ковариаций измеряемых признаков в генетических экспериментах часто можно представить в виде суммы двух генетических компонент (аддитивные и доминантные эффекты) и компонент, обусловленных действием внешней среды. Для оценки всех этих компонент Матер предложил метод наименьших квадратов (Mather K., Biometrical Genetics, London, 1949). В статье предлагается метод максимума правдоподобия, приводящий к итерациям при вычислениях. Эти два метода сравниваются на материале по скрещиванию растений. О. М. Калинин

9 В242. Об оптимальном выборе дозы в биологических испытаниях. Asano Chooichiro. Some studies on the optimum choice of dosage in biological assay. «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs», 1960, 7, № 2, 65—78 (англ.)

Эффект $u(x,\xi)$ действия лекарства дозы x является случайной величиной, причем ее математическое ожидание $U(x)$ равняется либо $(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}H\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]d\lambda$, либо $\frac{1}{2}H(1+\operatorname{ch}x)$, где $1\geqslant H>0$. Рассматривается вопрос о приближении $U(x)$ на различных участках с помощью отрезков. Далее для нормального случая указаны оптимальные значения доз для проверки простых гипотез об a и σ. Имеется 10 таблиц. С. С. Кислицын

9 В243. Полихотомическая реакция в биологических испытаниях. Gurland John, Lee Ilbok, Dahm Paul A. Polychotomous quantal response in biological assay. «Biometrics», 1960, **16**, № 3, 382—398 (англ.)

Обычно в биологических испытаниях (изучение действия лекарств и ядов на живые организмы) реакция считается дихотомической, объект или умирает или остается жить. В предположении, что кривая доза — эффект является нормальной или логистической, в статье рассматривается вопрос об оценках параметров этой кривой с помощью минимума χ^2 в случае полихотомической реакции. Обрабатываются материалы опытов с мухами. О. М. Калинин

9 В244. Применение логистической функции для оценки методом максимального правдоподобия параметров теста. Maxwell A. E. Maximum likelihood estimates of item parametrs using the logistic function. «Psychometrika», 1959, **24**, № 3, 221—227 (англ.)

Некоторые психологические и медицинские проблемы, например, проблемы токсикологии, требуют оценки параметров некоторой функции, которую автор называет логистической. Предполагается, что имеется k независимых экспериментов с двумя исходами и вероятностью положительного исхода

$$P_i=[1+\exp(-\alpha-\beta x_i)]^{-1},\quad i=1,\ldots,k,$$

где α и β — параметры логистической функции. Далее i-й эксперимент повторяется k раз. По результатам совокупности всех наблюдений случайной величины X_i автор строит оценки максимального правдоподобия для α, β. Находится явное выражение для этих оценок и их дисперсий. Приводится пример отыскания оценок

параметров α и β на материале, почерпнутом из медицинской литературы. Л. Д. Фельдман

9 В245. Новый метод анализа коллектива признаков. Perkal J., Szczotka F. Eine neue Methode der Analyse eines Kollektivs von Merkmalen. «Biometr. Z.», 1960, 2, № 2, 108—116 (нем.)

Пусть имеется совокупность из k элементов $e_1,\ldots,e_k$, на каждом из которых заданы n количественных признаков x_{pi}, где p — номер признака, а i — номер элемента. Таким образом, полную информацию о распределении признаков в совокупности дает матрица $||x_{pi}||$. Рассматриваются величины

$$m_i=\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}x_{pi},\quad d_{pi}=x_{pi}-m_i,\quad V_m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i^2.$$

Величины m_i автор называет индексами, а d_{pi} — остатками первого порядка. Далее вводятся величины

$$d_p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_{pi}.$$

Величины d_p предлагается разбивать на группы, элементы каждой из которых между собой положительно коррелированы. Возможную неоднозначность разбиения предлагается использовать так, чтобы элементы в подгруппах были возможно сильнее коррелированы. В каждой подгруппе при определенной нормировке подсчитываются средние. Полученные величины автор называет индексами второго порядка. Аналогично тому, как это было сделано для индексов первого порядка, подсчитываются остатки второго порядка. Таким же образом можно получить и индексы более высоких порядков. Информацию об истинных значениях признаков предлагается приближенно заменить информацией об индексах первого порядка. Если потеря информации слишком велика, то можно использовать индексы второго порядка и т. д. Приводится числовой пример.

Б. В. Финкельштейн

9 В246. Основные методы статистического анализа биологических задач. Venulet Jan, Wójcik Ryszard. Podstawowe metody analizy statystycznej zagadnień biologicznych. «Postępy biochem.», 1960, 6, № 1, 83—113 (польск., рез. англ.)

Обзорная статья. S. Zubrzycki

9 В247. Теорема о сходимости для некоторого класса марковских процессов. Kennedy Maurice. A convergence theorem for a certain class of Markoff processes. «Pacif. J. Math.», 1957, 7, № 2, 1107—1124 (англ.)

Рассматриваются некоторые марковские процессы, возникающие при изучении моделей обучения (РЖМат, 1957, 5810 К). Исследуется асимптотика при $n\to\infty$ функций вероятностей перехода за n шагов. М. Г. Шур

9 В248. Цепи бесконечного порядка и их применение к теории обучения. Lamperti John, Suppes Patrick. Chains of infinite order and their application to learning theory. «Pacif. J. Math.», 1959, 9, № 3, 739—754 (англ.)

Цель работы состоит в изучении асимптотического поведения класса случайных процессов, которые используются как модели процессов обучения. В первом разделе рассматриваются так называемые цепи бесконечного порядка — класс некоторых случайных процессов с конечным числом состояний, для которых переходные вероятности слабо зависят от отдаленного прошлого. В обобщенной формулировке доказываются предельные теоремы Деблина и Форте. Далее изучаются «линейные модели обучения». Объект подвергается серии испытаний, на каждое из которых он дает ответ, состоящий в выборе из конечного множества возможных действий. Этот ответ следует за подкрепляющим событием (снова выбор из конечного числа). Предполагается, что вероятности ответа в следующем опыте являются линейными функциями от вероятностей настоящего опыта, причем вид этих функций зависит от того, какое подкрепляющее событие произошло. Рассматриваются также модели экспериментов, в которых участвуют несколько объектов при разных типах взаимодействия между ними. Доказывается, что при довольно общих предположениях линейные модели обучения обладают свойствами эргодичности в своем поведении.

Б. М. Клосс

9 В249. Случайные упорядочения и стохастические теории ответов. Block H. D., Marschak J. Random orderings and stochastic theories of responses. «Contribs Probability and Statist.» Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 97—132 (англ.)

Пусть A — множество возможных действий данного лица, $F\subseteq A$ и $P(a, F)$, $a\in F$ — вероятность того, что данное лицо выберет a, если его заставляют выбрать элемент из F. Ставится вопрос, каким условиям удовлетворяет множество вероятностей $\{P(a, F)\}$. Пусть, например, $A=\{1, 2,\ldots,n\}$. Спрашивается, когда существует вектор $U=\{U_1,\ldots,U_n\}$, называемый случайной функцией полезности, такой, что для $M\subset A$

$$P\{i, M\}=P\{U_i\geqslant U_j \text{ для всех } j\in M\}.$$

Работа посвящена выяснению логических связей между различными условиями, накладываемыми на вероятности $P(a, F)$. Важное значение имеют прямо проверяемые условия (т. е., грубо говоря, условия, проверяемые по наблюдаемым вероятностям $P(a, F)$). Например, для существования вектора U дается следующее прямо проверяемое условие: достаточно (но не необходимо), чтобы отношение $P(i, M)/P(j, M)$ не зависело от $M\subset A$. В. Н. Тутубалин

9 В250. Анализ экспериментов по определению вкусового порога. Harris Eugene K. Analysis of experiments measuring threshold taste. «Biometrics», 1960, 16, № 2, 245—260 (англ.)

Эксперимент по определению вкусового порога состоит в следующем. Приготовлены растворы, концентрации которых X_i возрастают в геометрической прогрессии: $X_i=b^i$, $i=h, h+1,\ldots,k$, b — число. Каждому испытуемому предлагаются три мензурки, из которых одна или две содержат раствор, а оставшиеся (оставшаяся) — чистый растворитель. Нужно выбрать мензурку с жидкостью иного вкуса, чем в двух других, и указать, содержит ли она раствор или чистый растворитель. Предполагается, что s-й испытуемый характеризуется числом Y_s, называемым вкусовым порогом, таким, что при $b^i>Y_s$ вероятность p правильного ответа равна 1, а при $b^i<Y_s$ $p=\frac{1}{6}$ (поскольку всего имеется шесть возможностей). Предлагаются два способа для оценки распределения вкусового порога. При первом способе не делается никаких предположений о виде этого распределения. При втором способе считается, что число n_s, определенное соотношениями $b^{h+n_s-1}<Y_s<b^{h+n_s}$ имеет распределение, задаваемое формулой

$$P\{n_s=n\}=\binom{N}{n}\theta^n(1-\theta)^{N-n},$$

где θ имеет распределение с плотностью $g(\delta)=\frac{\beta^{\alpha+1}}{\alpha!}\delta^\alpha e^{-\beta\delta}$. Параметры α и β оцениваются с помощью метода моментов. В. Н. Тутубалин

9 В251. Выборочные флуктуации надежности критерия. Aoyama Hirojiro. Sampling fluctuations of the test reliability. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1957, 8, № 3, 129—143 (англ.)

Находятся явные и асимптотические выражения для первых и вторых моментов некоторых статистик, ис-

пользуемых как меры надежности психометрических тестов. Р. Л. Добрушин

9 В252. Как случайное общение организует население. Dodd Stuart C. How random interacting organizes a population, «Synthese», 1960, 12, № 1, 40—70 (англ.)

Рассматривается несколько моделей распространения новостей среди населения. Простейшей такой моделью является следующая: Пусть первоначально новость известна доле p людей. В последовательные дискретные промежутки времени они случайным образом разбиваются на пары и обмениваются новостями. Тогда по прошествии t периодов математическое ожидание доли незнакомых с новостью людей будет $(1-p)^{2^t}$. В других моделях учитывается влияние таких факторов, как возможности группового обмена новостями, недоверия к сообщениям и т. д. Большое место в статье занимают рассуждения общего характера. С. С. Кислицын

9 В253. Математическая статистика и задачи практики. Гнеденко Б. В. «Вестн. АН СССР», 1960, № 2, 38—43

Указывается на недооценку прикладной математической статистики в СССР. На примерах раскрываются перспективы ее приложений к разнообразным проблемам. Р. Л. Добрушин

9 В254 К. Введение в квантовую статистическую физику. Band William. An introduction to quantum statistics. Princeton, N. J. — Toronto — London — New York, D. Van Nostrand Co., Inc., 1955, xiv, 342 pp., ill. (англ.)

Книга представляет собой несложный курс статистической термодинамики, почти не требующий от читателя специальной дополнительной подготовки. Изложение материала достаточно подробно и единообразно. При рассмотрении сложных проблем автор ограничивается приведением результатов и качественным их обсуждением. Основной метод, применяемый в книге для исследования статистических равновесных систем, основан на рассмотрении числа различных состояний (как для случая квантовых систем Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака, так и для классической больцмановской системы) при фиксированном наборе чисел заполнения n_k (число систем из общего числа N, имеющих определенную энергию ε_k) и определении наиболее вероятного распределения этих чисел при заданной полной энергии E и заданном полном числе частиц N. С помощью определенных этим способом чисел заполнения (известные распределения Бозе, Ферми и Больцмана) определяются желаемые термодинамические характеристики системы. Показана эквивалентность этого приема методу Гиббса, связанного с вычислением статистической суммы состояний и большой статистической суммы. Основной объем книги посвящен теории классических и квантовых систем без взаимодействия частиц друг с другом: одноатомные и многоатомные идеальные газы, системы нескольких идеальных газов, находящихся в равновесии друг с другом, газ в равновесии с адсорбированной пленкой, газ в равновесии с каплями (энергия молекул в пленке или каплях считается равной $\varepsilon_j - \varpi$, где ε_j кинетическая энергия частицы), равновесие химически взаимодействующих идеальных газов, и др. В ряде глав рассмотрены следующие вопросы, касающиеся исследования неидеальных систем: изложена теория теплоемкости твердых тел по Дебаю, в уравнении состояния газа определена первая поправка на взаимодействие молекул друг с другом, получен второй вириальный коэффициент Бозе и Ферми для газов (в частности, для модели твердых сфер), обсуждена проблема построения теории жидкой фазы, рассмотрены теория ферромагнетизма Вейсса и некоторые вопросы теории упорядочения в бинарных сплавах типа замещения. Отдельная глава посвящена определению флуктуаций (дисперсий) отдельных физических величин: плотности, энергии, давления и др. И. А. Квасников

9 В255 К. Основы теории информации. Файнстейн А. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1960, 140 стр., 7 р. 40 к.

Перевод с английского. См. РЖМат, 1960, 1951К.

9 В256 К. Статистическая теория связи. Lee Yuk Wing. Statistical theory of communication. New York—London, John Wiley and Sons, Inc., 1960, xviii, 509 pp., ill., £6 14 sh. (англ.)

Книга содержит изложение некоторых вопросов применения теории случайных процессов и математической статистики в радиотехнике, электротехнике и других смежных областях и предназначена для инженеров этих специальностей. Как отмечает сам автор во введении, первоначально предполагалось изложить в книге содержание известной монографии Н. Винера «Экстраполяция, интерполяция и сглаживание стационарных процессов», но без вызывающих у инженеров затруднения математических сложностей, и в то же время физически обоснованно и наглядно. В дальнейшем программа книги несколько увеличилась, но при ее осуществлении автор старался всюду вести изложение наглядно, на доступном для инженеров физическом уровне строгости.

Книга состоит из 19 глав. Первые 11 глав имеют вводный характер и знакомят читателя с основами теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов и обобщенного гармонического анализа Винера. Для чтения этих глав от читателя не требуется никаких предварительных сведений по затрагиваемым вопросам. Глава 12 посвящена вопросу о корреляционных способах обнаружения периодического сигнала в шуме. В главах 13—17 разбираются вопросы линейных преобразований случайных процессов, линейной фильтрации и прогнозирования и некоторые задачи оптимальной (в определенном смысле) обработки случайных процессов. При решении этих вопросов широко используется предложенный Винером метод факторизации спектральных плотностей случайных процессов. Главы 18—19 затрагивают вопросы применения ортогональных систем функций для представления характеристик линейных систем и для синтеза оптимальных линейных систем. Что касается стиля изложения, то, по мнению референта, автор достиг поставленной цели. Многочисленные иллюстрации и задачи помогают читателю разобраться в физической сущности рассматриваемых вопросов и усвоить излагаемый материал на конкретных технических примерах. Несмотря на то, что книга не затрагивает многих важных областей статистической теории связи (по словам автора, книга является введением в теорию связи), она может быть весьма полезной для инженера, который впервые пожелает познакомиться с применениями статистики в радиофизике, электротехнике и смежных областях.

В. Ф. Писаренко

9 В257 К. Математические методы в социальных науках. Eds Arrow Kenneth J., Karlin Samuel, Suppes Patrick. Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959. Proc. 1st Stanford Sympos., June 15th—24th, 1959. Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, viii, 365 pp., ill., 8.50 doll. (англ.)

См. также: 9А120, 9А133, 9А146, 9А201, 9А352, 9Б365, 9Б464, 9Б465, 9В269, 9В279, 9В292, 9В295, 9В304—9В307, 9В309, 9В343

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

9 В258. Нужно ли переходить к канонической форме в дифференциальных задачах с начальными условиями? Ceschino F., Kuntzmann J. Faut il passer à la forme canonique dans les problèmes différentielles de conditions initiales? «Informat. processing. Paris — München — London», 1960, 33—36 (франц.; рез. англ., нем., русск., исп.)

Рассматривается вопрос об оценке погрешности при численном решении задач Коши для систем дифференциальных уравнений высших порядков в том случае, если предварительно осуществлен переход к канонической системе. Указывается на преимущество такого перехода в ряде случаев. Д. Б. Тополянский

9 В259. Об одном методе численного интегрирования траекторий в электронной оптике. Lapeyre Renée, Laudet Michel. Sur une méthode d'intégration numérique des trajectoires marginales en optique électronique. «C. r. Acad. sci.», 1960, **251**, № 18, 1874—1876 (франц.)

Для численного решения задачи Коши (которая, в частности, рассматривается в электронной оптике)

$$y'' + f(x)\,y = \varphi(x, y, y'),$$
$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$$

предложена формула типа Рунге — Кутта, дающая приближения пятого и четвертого порядков соответственно для искомой функции и ее производной. Рассмотрен пример. Д. Б. Тополянский

9 В260. Сходимость разностных методов. Törnig W. Zur Konvergenz der Differenzenschemaverfahren. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 9, 423—424 (нем.)

Гайер (РЖМат, 1958, 2420) доказал равномерную сходимость экстраполяционного метода Адамса для приближенного решения задачи Коши в случае обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (при некоторых условиях). Автор доказывает (при некоторых допущениях) сходимость интерполяционного и экстраполяционного методов Адамса для решения задачи Коши в случае обыкновенного дифференциального уравнения любого порядка. Автор указывает, что вопросы устойчивости им не были исследованы. Д. Б. Тополянский

9 В261. Программирование дифференциального уравнения Бесселя для электронной моделирующей машины. Sydow A. Die Programmierung der Besselschen Differentialgleichung für eine elektronische Analogierechenmaschine, «Automatisierung» (DDR), 1960, **3**, № 6, 255—258 (нем.; рез. русск.)

На электронной аналоговой машине UNIMAR приближенно решается задача Коши для уравнения Бесселя

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\,\frac{dy}{dt} + (t^2 - n^2)\,y = 0$$

при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$. Предварительно рассматривается случай $n = 0$. Исследуется вопрос о $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}$. Описывается счетная схема включения, в которой особо выделяется способ представления $\frac{1}{t}\cdot\frac{dy}{dt}$. Приведены также результаты для случаев $n = {}^1/_2,\ {}^9/_2$. Имеется 10 рисунков. Библ. 11 назв. Д. Б. Тополянский

9 В262. Об одном приближенном методе построения функции Коши. Азбелев Н. В., Смолин И. М., Цалюк З. Б. «Докл. АН СССР», 1960, **135**, № 3, 511—514

Дается метод последовательных приближений для построения функции Коши оператора

$$L[y] \equiv y^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} g_k(x)\,y^{(k)}$$

с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами. Приближения определяются равенствами

$$W_{l+1}(x, s) = W_l(x, s) - \int_s^x W_l(x, t)\,L[W_l(t, s)]\,dt,$$

где $W_0(x, s)$ — некоторая n раз непрерывно дифференцируемая по x при $a \leqslant s \leqslant x < b$ функция, удовлетворяющая условию $W_0^{(k)}(s, s) = \delta_{k, n-1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1$; δ_{ij} — символ Кронекера). Утверждается, что при выполнении условий

$$|L[W_0(x, s)]| \leqslant (x - s)^{\beta}\cdot Q, \qquad (1)$$
$$|K^{(k)}(x, s) - W_0^{(k)}(x, s)| \leqslant (x - s)^{\alpha_k} P_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

последовательность $\{W_l(x, s)\}$ сходится к функции Коши $K(x, s)$ оператора $L[y]$ и имеют место оценки

$$|K^{(k)}(x, s) - W_l^{(k)}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{P_k\,\alpha_k!\,(Q\beta!)^{2^l-1}}{[(2^l-1)(\beta+1)+\alpha_k]!}\,(x - s)^{(2^l-1)(\beta+1)+\alpha_k}.$$

Для установления неравенств (1) предлагается использовать функцию Коши $K_0(x, s)$ оператора $L_0[y] \equiv y^{(n)} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} r_k\,y^{(k)}$, где $r_k \geqslant |g_k(x)|$. Учитывая, что $K_0^{(k)}(x, s) \geqslant |K^{(k)}(x, s)|$, авторы получают

$$|K^{(k)}(x, s) - W_0^{(k)}(x, s)| \leqslant$$
$$\leqslant Q\int_s^x K_0^{(k)}(x, t)\,(t - s)^{\beta}\,dt.$$

Авторы показывают возможность использования сформулированной теоремы для оценок погрешности приближенных решений задачи Коши для неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ и границ применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах.

Б. Н. Бабкин

9 В263. К численному решению уравнения поперечного изгиба монолитного крыла. Вахитов М. Б. «Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн.», 1960, № 4, 132—141

Дифференциальное уравнение $(t_1\varphi_1'')'' + t_3\varphi_1' = F$ с краевыми условиями $\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = 0$, $t_1(l)\,\varphi_1''(l) + t_4(l)\,\varphi_1'(l) = 0$ решается численно путем замены его интегральным уравнением с последующим представлением определенных интегралов в виде конечных сумм.

9 В264. Исследование уравнений в конечных разностях для точек, расположенных на границе поверхностного распределения зарядов. Случай систем вращения. Gélard Jacques. Recherche d'équations aux différences finies pour des points situés à la limite d'une distribution superficielle de charges. Cas des systémes de révolution. «C. r. Acad. sci.», 1960, **251**, № 18, 1871—1873 (франц.)

Рассматривается внешняя задача теории потенциала для уравнения

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{k}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\right]\cdot v(R,z)=0$$

при условиях на границе S:

$$v_+=v_-,\quad \frac{\partial v_+}{\partial n}-\frac{\partial v_-}{\partial n}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

В двух случаях (относительно S) исследуются разностные уравнения в граничных точках S.

Д. Б. Тополянский

9 В265. Уравнение в конечных разностях с приближением четвертого порядка для уравнения Гельмгольца систем вращения. Lévy Albert. Equation aux différences finies d l'approximation du quatrième ordre, pour l'équation d'Helmholtz des systèmes de révolutions. «C. r. Acad. sci.», 1960, **251**, № 20, 2126—2128 (франц.)

Для уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{k}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\lambda\varphi=0 \qquad (1)$$

в случае квадратной сетки строится 9-точечное уравнение в конечных разностях с приближением 4-го порядка относительно шага h сетки. При выводе этого разностного уравнения используются разложения в ряд Тейлора функции $\varphi(r, z)$ в восьми привлекаемых узлах, окружающих произвольный центральный узел, и некоторых уравнений, полученных из (1) путем дифференцирования его по r и z необходимое число раз. Отдельно выводится разностное уравнение для узлов, лежащих на оси z.

Д. Ф. Давиденко

9 В266. Оценки ошибки граничных задач для уравнений в частных производных с бесконечной областью. Collatz Lothar. Fehlerabschätzungen bei Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen mit unendlichem Grundgebiet. «Z. angew. Math. und Phys.», 1958, **9a**, № 2, 118—128 (нем.; рез. англ.)

Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, рассматриваемых в бесконечной области, сводятся путем некоторого преобразования к задачам в конечной области, для которых решение может быть оценено по принципу максимума. Рассматриваются первая, вторая и третья граничные задачи для линейных эллиптических уравнений и некоторых линейных и нелинейных уравнений параболического типа. В случае эллиптического уравнения выводится оценка погрешности приближенного решения граничной задачи, которое точно удовлетворяет дифференциальному уравнению и приближенно — граничным условиям. Полученная оценка справедлива для первой и третьей граничных задач при произвольном n и для второй граничной задачи — при $n>2$ (n-размерность пространства координат). При этом применяется преобразование взаимных радиусов-векторов, переводящее бесконечную область в конечную. В качестве примера рассматриваются первая граничная задача теории потенциала для внешней области эллипсоида и вторая граничная задача проблемы обтекания для $n=3$. В случае уравнений параболического типа для получения аналогичных оценок применяется преобразование вида

$$u(x_j, t)=a(x_j)\,U(b_k(x_k), t),$$

где $X_k=b_k(x_k)$ — прежние переменные, x_k — новые переменные; $a(x_j)>0$. Отдельно рассматривается параболическое уравнение с одной пространственной переменной в полубесконечной области: $X_0<X<\infty$.

Д. Ф. Давиденко

9 В267. Решение плоской задачи методом релаксации. Пропастина Г. С. «Тр. Киевск. автомоб.-дор. ин-та», 1960, сб. 4, 145—171

Для приближенного решения бигармонической задачи, к которой приводится плоская задача теории упругости, применяется разностный метод (сетка — квадратная). Полученная при этом система линейных алгебраических уравнений решается методом релаксации. Решены 4 примера.

Д. Б. Тополянский

9 В268. Об одном численном методе решения краевых задач для уравнений в частных производных. Положий Г. Н. «Докл. АН СССР», 1960, **134**, № 1, 39—41

Предложен способ прямого решения систем алгебраических уравнений, к которым приводит применение метода сеток при приближенном решении краевых задач для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения.

Д. Б. Тополянский

9 В269. Решение дифференциальных уравнений с частными производными вероятностным методом при помощи электронных моделей. Ку Чэн, Казда Л. Ф., Уиндекнехт Т. (Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 12 стр., илл.

Предлагается метод решения обобщенной двумерной задачи Дирихле для уравнения вида

$$D_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+D_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}-$$

$$-K_1(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1}-K_2(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}=0 \qquad (1)$$

с условием $f=\Phi(x_1, x_2)$ на границе C, основанный на связи между дифференциальными уравнениями в частных производных и случайными процессами, которые происходят в электрических цепях со случайным возмущением. Уравнение (1) решается следующим образом. На электронной моделирующей установке постоянного тока набираются уравнения

$$y_1'+K_1(y_1,y_2)=F_1(t) \text{ и } y_2'+K_2(y_1,y_2)=F_2(t),$$

где y_1 и y_2 — реакции двух связанных $R-L$ цепочек, в начальный момент равные x_1 и x_2; $K_1(y_1, y_2)$ и $K_2(y_1, y_2)$ — нелинейные активные сопротивления; F_1 и F_2 — так называемые гауссовы белые шумы. Величины y_1 и y_2 подаются на горизонтальные и вертикальные пластины осциллоскопа, так что функция условной плотности вероятности $f(y_1, y_2, t/x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнениям

$$D_1\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}+D_2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}+\frac{\partial}{\partial y_1}[K_1(y_1,y_2)f]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_2}[K_2(y_1,y_2)f]=\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$D_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+D_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}-$$

$$-K_1(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1}-K_2(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial t}.$$

На экран осциллоскопа надевается маска, имеющая форму границы C, и луч осциллоскопа движется случайным образом по заданному закону $f(y_1, y_2, t/x_1, x_2)$ из точки (x_1, x_2) до тех пор, пока не пересечет границы C в точке C_i, где он останавливается. Автоматическое записывающее устройство регистрирует значение $\Phi(C_i)$, схема возврата переводит луч в (x_1, x_2), и цикл повторяется многократно. Получаемое при этом приближенное значение $\overline{f}=\sum\Phi(C_i)\frac{m_i}{N}$ стремится в среднем к решению (1) в точке (x_1, x_2), если m_i/N — отношение числа случаев попадания луча в C_i к общему числу случаев попадания на границу C. В работе приведены результаты решения изложенным методом следующих четырех задач:

1) Уравнения Лапласа для единичного квадрата с граничными условиями $f(x_1, 0)=f(0, x_2)=0$ и $f(x_1, 1)=$

$= f(1, x_2) = 100$ на квадрате с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ $(1, 1)$, $(0, 1)$;

2) Уравнения Лапласа для единичного круга $x_1^2 + x_2^2 = 1$ с граничными условиями $f(1, \theta)$ при $0 < \theta < \pi$ и $f(1, \theta) = -1$ при $\pi < \theta < 2\pi$ $\left(\theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}\right)$;

3) Уравнения

$$D\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right] + K\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

для квадрата задачи 1), с граничными условиями

$$f(x_1, 0) = f(1, x_2) = 0 \text{ и } f(x_1, 1) = f(0, x_2) = 100;$$

4) Уравнения

$$D\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\right] + K\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\right] = 0$$

для квадрата и граничных условий задачи 3). Для каждой задачи дана кривая, построенная для аналитического решения, и точки около кривой для машинного решения. Отмечается, что, несмотря на совпадение в целом машинных и аналитических решений, машинные решения дают значительные отклонения от аналитических. Несовпадения машинных и аналитических решений авторы объясняют статистической природой сходимости статистических решений к аналитическим, так как для любого конечного числа граничных точек вероятность того, что машинное решение будет отлично от точного решения больше, чем на заданную величину, всегда отлична от нуля, как бы мала она ни была. Авторы делают вывод, что предложенный метод является весьма продуктивным в инженерных приложениях, когда достаточно иметь приблизительное решение, когда время решения не определяет выбора метода вычисления и когда объем, вес или стоимость вычисленного оборудования должны быть относительно малы. В. Я. Евфранов

9 В270. Применение приближенного метода интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными к расчету цилиндрической оболочки. Бурцев П. Е. «Тр. Моск. энерг. ин-та», 1959, вып. 32, 67—85

Система из двух уравнений в частных производных

$$a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left(\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}\right) + F(\xi, \theta) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left(\varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) - a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 0$$

заменяется некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (метод прямых) и для последней находится общее решение. Приводится один пример. Я. И. Алихашкин

9 В271. Об одном способе численного интегрирования уравнений упругого равновесия. Рахматулин Х. А., Левит Д. Е. «Инженерный сб.», 1960, 28, 224—240

Пусть область D плоскости ограничена положительными направлениями осей координат, прямой $y = R$ и частью окружности $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = R^2$. В области D для плоско-напряженного состояния тела при отсутствии массовых сил решается задача интегрирования системы уравнений упругого равновесия

$$(k+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (k+1)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

где u и v — компоненты смещения, $k = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$ (λ и μ — коэффициенты Ламе), при контурных условиях: на одном отрезке оси x-ов, при $0 \leqslant x \leqslant 3R/2$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial x} = -p$$

(на этом участке действует постоянная и равномерно распределенная нагрузка p); на другом отрезке оси x-ов, при $R/2 \leqslant x \leqslant 3R/2$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

на отрезке оси y-ов $u=0$, $\partial v/\partial x=0$, на остальной части контура $u=0$ и $v=0$. Эта задача решается разностным методом (сетка — квадратная с достаточно большим шагом). Для решения полученной системы алгебраических уравнений авторы применяют комбинированный метод: сначала решают систему алгебраических уравнений при помощи определителей (по Крамеру), а затем вычисленные (при большом шаге) и найденные линейным интерполированием значения функций принимают за начальные данные искомых переменных величин новой системы (с уменьшенным шагом), которая решается итерационным методом. Указанный комбинированный метод решения системы алгебраических уравнений осуществляется при помощи быстродействующих счетных машин.

Д. Б. Тополянский

9 В272. Решение задачи о граничном слое в угле методом релаксации. Krzywóblocki M. Z. v. On the boundary layer in a corner by use of the relaxation method. «Ganita», 1956, **7**, № 2, 77—112 (англ.)

Система уравнений гидродинамики (уравнение Навье—Стокса, уравнения непрерывности, состояния и энергии) аппроксимируется разностными уравнениями, которые решаются методом итераций (релаксации).

9 В273. О некоторых бесконечных системах линейных уравнений, встречающихся в плоской задаче теории упругости для прямоугольной области. Teodorescu P. P. Asupra unor sisteme infinite de ecuaţii liniare care intervin în problema plană a teoriei elasticităţii pentru un domeniu dreptunghiular. «Studii şi cercetări mec. apl. Acad. RPR», 1960, **11**, № 4, 925—935 (рум.; рез. русск., франц.)

Решение первой основной задачи теории упругости для прямоугольной области сводится к решению бесконечной регулярной системы линейных алгебраических уравнений.

9 В274. Преобразование бесконечных обратных матриц в матрицы конечных порядков и его применение к некоторым задачам теории упругости. Літвінов М. В. Перетворення нескінченних обернених матриць до матриць скінченних порядків та його застосування до деяких задач теорії пружності. «Прикл. механіка», 1960, **6**, № 3, 338—343 (укр.; рез. русск.)

Исходя из результатов, изложенных в предыдущих статьях (РЖМат, 1956, 6871, 8343), автор предлагает алгоритм преобразования бесконечных обратных матриц в матрицы конечных порядков и применяет его при решении задачи теории упругости (чистый изгиб в бесконечной полосе) разностным методом; полученное приближенное решение сравнивается с точным. Вывод в общем виде основной формулы, на которой базируется предложенный автором алгоритм, связан с суммированием матричных рядов и требует дополнительного исследования.

Д. Б. Тополянский

9 В275. Оценки погрешности метода Ритца для собственных значений и собственных функций дифференциального уравнения. Джишкариани А. В. «Сообщ. АН ГрузССР», 1960, **25**, № 1, 11—18

Рассматривается вопрос о приближенном нахождении по методу Ритца в m-мерной области D_m собственных

значений и собственных функций дифференциального уравнения

$$A[u(x)] = \lambda w(x) u(x) \qquad (1)$$

при любых однородных краевых условиях (A — самосопряженный положительно определенный оператор любого порядка, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — точка m-мерного пространства, $w(x)$ — положительная непрерывная функция). Предполагается, что: 1) при тех же краевых условиях известны собственные значения ω_i $(i = 1, 2, \ldots)$ и собственные функции v_i $(i = 1, 2, \ldots)$ уравнения

$$Av = \omega v, \qquad (2)$$

2) ортонормированные собственные функции v_i образуют полную систему, 3) ряд

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i(x) v_i(t)}{\omega_i}$$

сходится в $L_2(D_m)$. В качестве системы координатных функций для приближенного решения задачи (1) берутся первые n собственных функций уравнения (2). Исходя из того, что приближенные решения $\lambda_{j,n}$, $u_{j,n}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и точные решения λ_j, u_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ задачи (1) удовлетворяют соответственно интегральным уравнениям

$$u_{j,n}(x) = \lambda_{j,n} \int_{D_m} K_n(x, t) w(t) u_{j,n}(t)\, dt$$

и

$$u_j(x) = \lambda_j \int_{D_m} G(x, t) w(t) u_j(t)\, dt,$$

где

$$K_n(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i(x) v_i(t)}{\omega_i},$$

$G(x, t)$ — функция Грина оператора A, автор получает несколько оценок для погрешности собственных значений и собственных функций в методе Ритца. Результаты, полученные автором (РЖМат, 1961, 2В150) для обыкновенного дифференциального уравнения, обобщаются на многомерный случай. Для оператора Лапласа ($A = -\Delta$) при любых из следующих краевых условий

$$u\Big|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right]_S = 0$$

оценки погрешности для собственных значений и собственных функций в случае плоскости дают соответственно порядки $o(n^{-1})$ и $o(n^{-0,5})$ и в случае пространства соответственно порядки $o(n^{-2/3})$ и $o(n^{-1/6})$.

Д. Б. Тополянский

9 В276. О приближенном решении одной нелинейной задачи параболического типа (Аннотация статьи, принятой к печати). Шайдуков Г. М. «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1961, № 1, 185—186

9 В277. О приближенном решении одной нелинейной задачи параболического типа методом С. А. Чаплыгина. Шайдуков Г. М. «Тр. Казанск. с.-х. ин-та», 1959 (1960), вып. 42, 184—200

Рассматривается краевая задача

$$L(y) = \frac{\partial u}{\partial t} + F(P, t, u) \equiv \Phi\left(P, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

$$u|_S = 0, \quad u|_{t=0} = 0,$$

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Область D предполагается конечной и ограниченной достаточно гладкой границей S, а линейный оператор —

$$L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

положительно определенным. Считая, что a_{ij}, $\Phi(P, t, u, q)$ — непрерывные и ограниченные функции при $P \in \overline{D}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < u, q < +\infty$, причем Φ имеет конечные частные производные 2-го порядка по u и q и $\Phi_u \geqslant 0$, $\Phi_q > 0$, автор строит последовательность верхних функций $\{u_m(P, t)\}$, монотонно сходящуюся к решению $u(P, t)$ краевой задачи. Алгоритм построения функций $u_m(P, t)$ задается в виде последовательности решений линейных краевых задач:

$$L[u_m - u_{m-1}] = \frac{\partial (u_m - u_{m-1})}{\partial t} + A(u_m - u_{m-1}) + \omega_m,$$

$u_m|_S = 0$, $u_m|_{t=0} = 0$. Здесь $A = \max F_u(P, t, u)$ при $P \in D$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant u \leqslant u_0$, $\omega_{m+1} = \Phi\left(P, t, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial t}\right) - L[u_m]$, $u_0(P, t)$ — начальная верхняя функция. $u_0(P, t)$ находится из уравнения

$$L[u_0] = \frac{\partial u_0}{\partial t} + F(P, t, 0) + A_0 u_0,$$

$$u_0|_S = 0, \quad u_0|_{t=0} = 0, \quad A_0 = \min_{P, t} F_u(P, t, 0).$$

Скорость сходимости имеет порядок убывания членов геометрической прогрессии. Приводятся квадратурные формулы последовательности верхних функций. Работа иллюстрируется применением метода к решению задачи о тепловом излучении линейного стержня. Б. Н. Бабкин

9 В278. Численное интегрирование уравнения переноса нейтронов без углового усечения. Wilf Herbert S. Numerical integration of the transport equation with no angular truncation. «J. Math. Phys.», 1960, **1**, № 3, 225—230 (англ.)

Предлагается приближенный метод решения односкоростного уравнения переноса нейтронов с любым, не зависящим от азимута, законом рассеяния для периодических граничных условий и граничных условий вакуума. Сущность метода состоит в том, что угловая аппроксимация применяется только относительно ядра рассеяния, а не относительно углового потока, как это имеет место в известных S_n-методе Карлсона, D_n-методе Вика-Чандрасекхара и P_n-методе. В указанном разложении удерживается конечное число членов. Потом уравнение переноса заменяется системой спаренных интегральных уравнений Фредгольма, которая решается методом последовательных приближений. Для вычисления квадратур предложены специальные формулы, учитывающие сингулярность ядер интегральных уравнений. Подобный метод применялся ранее Бете, Тонксом, Гурвицем и Цвейфелем для иных целей. Н. Я. Лященко

9 В279. О решении интегрального уравнения Пайерлса методом Монте-Карло. Соболь И. М. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 3, 361—366 (рез. англ.)

Оценивается эффективность метода Монте-Карло при определении первого собственного значения интегрального уравнения Пайерлса

$$n(P) = \qquad (1)$$

$$= \lambda \int\int\int_G \frac{\beta(P') \exp\left\{-|P - P'| \int_0^1 \alpha[tP + (1-t)P']\, dt\right\} n(P')\, dP'}{4\pi |P - P'|^2},$$

где собственная функция $n_1(P)$ — плотность нейтронов реактора G с параметрами $\alpha(P)$ и $\beta(P)$. Для бесконеч-

ного цилиндра уравнение (1) преобразуется в $n(Q) = \lambda \iint_D \beta(Q') \varkappa(Q, Q') n(Q') dQ'$, где ядро $\varkappa(Q, Q')$ — симметрично:

$$\varkappa(Q, Q') = \frac{1}{2\pi|Q-Q'|_0} \int_0^1 \cdot \exp\left\{ - \frac{\int_0^1 \alpha[tQ+(1+t)Q']dt}{\sqrt{1-s^2}} \right\} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}},$$

а Q — вектор на плоскости x, y. При построении блуждания точки $P = Q + s\bar{k}$ в единичном цилиндре $G_1 = D \times [0, 1]$ начальная точка $P_0 = Q_0$ выбирается в плоскости x, y, вводятся цилиндрические координаты (r, θ, s) с центром в Q и задается плотность вероятности перехода из точки P_i в точку P формулой

$$f(P_i, P) = \frac{\alpha(Q) \exp\left\{ - \int_0^r \alpha(Q_i + i\omega)\left(1 - s_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \right\}}{2\pi \sqrt{1 - s_i^2}\, |Q - Q_i|\, \zeta(P_i, \theta)},$$

где $\zeta(P_i, \theta)$ — соответствующим образом построенная функция. Последовательные приближения к λ_1 вычисляются по формуле

$$\lambda_k = (\varphi_k, \varphi_0)/(\varphi_{k+1}, \varphi_0),$$

где $\varphi_0(Q)$ — произвольная начальная функция,

$$\varphi_k(Q) = \iint \beta(Q') \varkappa(Q, Q') \varphi_{k-1}(Q') dQ' -$$

ее к-я итерация и

$$(\varphi_k, \varphi_0) = \iint_D \beta(Q) \varphi_k(Q) \varphi_0(Q) dQ.$$

Для иллюстрации метода приводится пример для бесконечного однородного круглого цилиндра G с параметрами $R = 2, 5$, $\alpha(Q) = 1$ и $\beta(Q) = 1$. Сосчитаны шесть вариантов, различающихся функциями $\varphi_0(r)$ (r — расстояние от оси цилиндра) или различными распределениями начальной точки $f(Q_0)$. Областями D_p были 8 колец вида $r_{p-1} \leqslant r < r_p$ ($r_p = 0;\ 0,4;\ 0,7;\ 1,0;\ 1,3;\ 1,6;\ 1,9;\ 2,2;\ 2,5$). Все варианты считались по одним и тем же псевдослучайным числам, число испытаний $N = 900$, число приближений $n = 4$, продолжительность счета на машине Стрела-1 равна $0{,}003\ Nn$ минут. Результаты вычислений приводятся в виде трех таблиц и двух графиков. В. Я. Евфанов

9 В280. О решении систем линейных уравнений итеративными методами Л. В. Канторовича и А. М. Лопшица. Загускин В. Л. «Уч. зап. Ярославск. гос. пед. ин-т», 1960, вып. 34, 69—80

Описывается градиентный итерационный метод (Q, p-метод) для решения линейных систем $AX = a$. Последовательные приближения к решению определяются в виде

$$X_{k+1} = X_k + \sum_{r=0}^{p-1} \alpha_r A^r \Delta_k, \quad \Delta_k = a - AX_k.$$

Коэффициенты α_r находятся из условия минимума функционала $(\Delta_{k+1}, Q\Delta_{k+1})$, где Q — некоторый положительно определенный оператор, перестановочный с A. При $Q = A^{-1}$ получается p-шаговый метод наискорейшего спуска, при $Q = E$ — p-шаговый метод с минимальными невязками. Доказана сходимость (Q, p)-метода и получены оценки скорости сходимости. Описывается один из вариантов метода Лопшица, пригодный для любых совместных систем линейных уравнений и имеющий простую вычислительную схему. Доказывается его сходимость. Дается обобщение метода. Приводится сравнение метода наискорейшего спуска с методом минимальных невязок, а также метода Зейделя с предложенным вариантом метода Лопшица. В. Н. Кублановская

9 В281. О численном решении систем линейных уравнений. Passelecq D. Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires. XI—XIV. «Techn. tijdschr. U. I. Lv.», 1959, 87, № 3, 31—40 (франц.)

Реферируемая статья является продолжением работы автора под тем же названием, посвященной численному решению систем линейных алгебраических уравнений. Здесь излагаются два метода обращения матрицы A порядка n: метод разложения матрицы в произведение двух треугольных матриц и метод окаймления. Приводится число операций, требуемых для обращения матрицы каждым из методов: $n(n+1)(2n-1)/2 + n^2$ операций для произвольной матрицы и $n(2n^2+6n-2)/6 + n^2$ для симметрической матрицы при первом способе обращения; n^3 операций для произвольной матрицы и $n^2(n+1)/2$ для симметрической — в методе окаймления. Оба метода проиллюстрированы числовыми примерами. Отмечается, что применение обращения матрицы к решению системы линейных уравнений невыгодно с точки зрения числа требуемых операций (за исключением случая, когда решается одна и та же система уравнений для ряда различных правых частей). Г. И. Бирюк

9 В282. О сходимости итерационных методов для решения систем линейных уравнений в случае особенной матрицы коэффициентов. Ansorge R. Über die Konvergenz der Iterationsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme im Falle einer singulären Koeffizientenmatrix. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, № 9, 427 (нем.)

Пусть для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными (записанной в матричной форме)

$$Ax = B \tag{1}$$

применяется итерационный метод вида

$$A_1 x^{(\nu)} + A_2 x^{(\nu-1)} = B, \tag{2}$$

где $A_1 + A_2 = A$, а через $x^{(\nu)}$ обозначено ν-е приближение решения x. Из допущения $A_1 \neq 0$ следует, что $x - x^{(\nu)} = \left(-A_1^{-1}A_2\right)^{\nu}\left(x - x^{(0)}\right)$, где $x^{(0)}$ — произвольный начальный вектор. В случае неособенной матрицы ($\det A \neq 0$) решение определяется однозначно и необходимое и достаточное условие сходимости метода формулируется так: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(-A_1^{-1}A_2\right)^{\nu} = Q$, т. е. собственные значения λ_G ($G = -A_1^{-1}A_2$) лежат внутри круга единичного радиуса. Доказывается, что в случае особенной матрицы ($\det A = 0$) для разрешимой системы линейных уравнений (1) и метода (2) при $A_1 \neq 0$ имеет место теорема: Если матрица $G = -A_1^{-1}A_2$ имеет, кроме собственных значений, равных единице, только такие, которые в сумме меньше, чем 1, и соответствующие собственным значениям 1, элементарные делители все линейны, то метод (2) сходится к решению системы (1). В приведенных примерах устанавливается соблюдение условий теоремы. В частности, указанные условия реализуются в том случае, когда G симметрична и для собственных значений λ_G соблюдается неравенство $0 \leqslant \lambda_G \leqslant 1$; этот случай представляется, когда A симметрична и положительно полуопределена и для решения системы (1) применяется метод Мизеса (Mises R., Pollacek-Geiringer H., Z. angew. Math. und Mech., 1929, № 9, 58—77). Д. Б. Тополянский

9 В283. Вычисление первого и нескольких следующих собственных значений вещественной или комплексной матрицы. Clerc D. La recherche des valeurs propres dominantes et subdominantes d'une matrice réelle ou complexe. «Rech. aéronaut.», 1959, № 72, 53—58 (франц.)

Предложенное автором (РЖМат, 1957, 7400) усовершенствование итеративного метода Дункана и Колара для нахождения вещественных собственных чисел и собственных векторов матрицы заключалось в составлении и итерировании расширенной матрицы (вместо составления и итерирования вспомогательных матриц). В реферируемой статье «метод расширенных матриц» распространяется на случай вещественных матриц с комплексными собственными значениями и комплексных матриц. Представляет практический интерес применение предложенного метода в случае матриц достаточно высокого порядка, для которых ищется некоторое ограниченное число «доминантных» собственных чисел и собственных векторов матрицы (например, в задачах колебаний). Д. Б. Тополянский

9 В284. Замечание о вычислении старшего собственного значения по методу Галеркина. Ш и Ч ж у н-Ц и. «Вычисл. математика», сб. 6, 1960, 84—86

Применение метода Бубнова—Галеркина к решению задачи о собственных значениях уравнения $Lx - \lambda Mx = 0$, где L — ограниченный снизу симметричный оператор и M — симметричный положительно определенный оператор, приводит к системе уравнений $Ax - \lambda Bx = 0$, где

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots\dots \\ b_{n1} \dots b_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

$$a_{ij} = (L\varphi_i, \varphi_j) = (L\varphi_j, \varphi_i) = a_{ji},$$
$$b_{ij} = (M\varphi_i, \varphi_j) = (M\varphi_j, \varphi_i) = b_{ji},$$

$\{\varphi_n(x)\}$ — выбранная система координатных функций, удовлетворяющая некоторым условиям. Приближения собственных значений получаются из уравнения

$$\det \| a_{ij} - \lambda b_{ij} \| = 0.$$

Предлагается способ получения поправки к уже найденному первому собственному значению $\lambda_0^{(n)}$ и соответствующему собственному вектору $x_0^{(n)}$, не решая системы уравнений m-го порядка ($m > n$). При этом автор использует результаты А. А. Абрамова и М. Г. Нейгауз (C. r. du Congrès International, Mons et Bruxelles, 9—14 juni, 1958). Д. Б. Тополянский

9 В285. Решение одного класса бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Б е р к о в и ч Ф. Д. «Тр. Новочерк. политехн. ин-та», 1960, **109**, 11—20

Рассматриваются бесконечные системы, у которых вдоль всех параллельных диагоналей коэффициенты почти одинаковы (в некотором смысле). Система

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{nk} x_k + b_n \quad (n = 0 \pm 1, \dots)$$

называется нормальной, если

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_{nk} |^2 < \infty$$

(это условие обозначается $\{c_{nk}\} \in l_2$) и $\{b_n\} \in l_2$. Доказывается, что система

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} x_k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk} x_k + c_n \qquad (1)$$

при $\{a_n\} \in l_1$, $\{b_{n,k}\} \in l_2$, $\{c_n\} \in l_2$, вообще говоря, не является нормальной, но может быть приведена к нормальной с использованием преобразования Лорана. Под преобразованием Лорана понимается соответствие между последовательностью $\{c_n\}$ и функцией $C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k t^k$. Последовательность $\{c_n\}$ при этом называется «оригиналом», функция $C(t)$ — «изображением». Преобразованная система имеет вид:

$$x_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} d_{ns} x_s + \gamma_n,$$

где

$$d_{ns} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{ks} r_{n-k}, \quad \gamma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k,\,n-k} \quad (n = 0, \pm 1, \dots),$$

$\{r_n\}$ — оригинал $R(t) = [1 - A(t)]^{-1}$. Условие приводимости состоит в том, что функция $1 - A(t) \neq 0$ на $|t| = 1$. Рассматривается также вопрос о регуляризации системы. Система

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} x_k + d_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

называется (вполне) регулярной, если

$$\sum_{k=0}^{\infty} | c_{nk} | < 1 \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} | c_{nk} | < \theta < 1 \right) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Пусть система

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{nk} x_k \quad (n = 0, 1, \dots)$$

имеет решение и удовлетворяет условиям

$$\{\varepsilon_{nk}\} \in l_1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} | \varepsilon_{n,\,k} | < \theta < 1 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Функция $A(z)$ (изображение $\{a_n\}$) — аналитическая в кольце $r + \varepsilon \leqslant |z| \leqslant R - \varepsilon$, содержащем единичную окружность, причем $1 - A(z)$ имеет в этом кольце лишь простые корни, по модулю большие единицы (здесь

$$r = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, \quad R^{-1} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \Big).$$

При этих условиях рассматриваемая система может быть с помощью некоторого преобразования приведена к регулярной. Рассматривается также вопрос о решении систем такого рода. Доказывается, что при некоторых условиях накладываемых на коэффициенты, решение системы

$$x_n = \sum_{l=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}^{(l)} k^l x_k + \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^{(l)} k^l x_k \right) + \sum_{p=0}^{s} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} b_{n-k}^{(p)} k^p x_k + \sum_{k=-\infty}^{-1} d_{nk}^{(p)} k^p x_k \right) + q_n \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

может быть сведено к решению обобщенной краевой задачи Римана. В. Л. Загускин

9 В286. Теоретическое и числовое решение системы с бесконечным числом уравнений и бесконечным числом неизвестных. J e n t s c h W. Theoretische und numerische Auflösung eines Systems unendlich vieler Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. «Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau», 1959, **5**, № 2-3, 113—119 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Рассматривается система

$$x_{\nu-1} - x_\nu = c x_{2\nu} \quad (\nu = 2, 3, \dots),$$

где $c > 0$ (со ссылкой на статью Берга, РЖМат, 1958, 1261). Если матрицу системы записать в виде $E + K$,

где E — единичная матрица в гильбертовом пространстве, то для нормы матрицы K получается оценка $1 \leqslant \| K \| \leqslant 1 + c$. Кроме того, оператор, порождаемый матрицей K, не является вполне непрерывным. В силу этого к системе (1) неприменимы известные условия существования и единственности решения. Развивая приведенный в указанной выше статье Берга метод, автор получает асимптотические формулы для вычисления квадратично суммируемого решения с точностью в несколько десятичных знаков. Имеется числовой пример (случай $c = 1$). В. Л. Загускин

9 В287. О приближенном определении корней многочленов n-й степени. Glomb John D. On the approximation of roots of nth order polynomials. «IRE Trans. Automat Control», 1960, **5**, № 4, 331—333 (англ.)

Для приближенного определения действительных и комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами предлагается пользоваться графическим методом Труксала (J. G. Truxal). С этой целью уравнение четвертой степени $s^4+as^3+bs^2+cs+d=0$ (которое автор в основном и рассматривает) представляется в виде

$$0 = 1 + \frac{K_1\left(s^2 + \frac{c}{b}\,s + \frac{d}{b}\right)}{s^3\,(s + a)} \quad (K_1 = b), \qquad (1)$$

и

$$0 = 1 + \frac{K_2\left(s + \frac{d}{c}\right)}{s^2\,(s^2 + as + b)} \quad (K_2 = c). \qquad (2)$$

Считая затем K_1 и K_2 переменными, нужно начертить на комплексной плоскости кривые, вдоль которых уравнения (1) и (2) имеют действительные решения K_1 и K_2 соответственно тех же знаков, что у коэффициентов b и c. Сюда входят, в частности, некоторые отрезки действительной оси. Точки пересечения кривых дают приближенные значения корней. Методика построения кривых в данной работе не описывается. Приводится числовой пример. Для уточнения найденных корней автор рекомендует использовать метод Ньютона (в случае действительных корней) и метод Лина. В. Л. Загускин

9 В288. Метод отделения вычисления комплексных корней алгебраических уравнений. Derwidué L. Une méthode par séparation de calcul des racines complexes des équations algébriques. «Mathesis», 1957, **66**, № 10, 354—359 (франц.)

Автор излагает метод отделения корней, применимый к вычислению комплексных корней алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами. Метод основан на теореме, установленной автором ранее, и состоит в следующем. Пусть уравнение

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

$a_0 a_n \neq 0$, $z = x + iy$, имеет α корней с вещественной положительной частью, а уравнение $f^*(z') = 0$, полученное из $f(z) = 0$ заменой z на $z' + h$, имеет β таких корней. Тогда между значениями $x = 0$ и $x = h$ находится точно $|\alpha - \beta|$ корней уравнения $f(z) = 0$. Давая h различные положительные или отрицательные значения, можно получить ряд областей, в каждой из которых содержатся корни только с одинаковой вещественной частью. Полином $f^*(z')$ легко вычисляется по схеме Горнера, число корней с вещественной положительной частью находится из схемы Рауса. Метод иллюстрируется числовыми примерами. Г. И. Бирюк

9 В289. По поводу метода Греффе. Parodi Maurice. A propos de la méthode de Graeffe. «C. r. Acad. sci.», 1959, **249**, № 20, 1999 (франц.)

Вместо вычисления сумм $2k$-х степеней корней алгебраического уравнения

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

которое используется в методе Лобачевского — Греффе для вычисления наибольшего по модулю вещественного корня этого уравнения, можно вычислять следы соответствующих степеней матрицы A, собственные значения которой совпадают с нулями функции $f(z)$. В общем случае этот процесс очень громоздок, но в случае уравнения частного вида

$z^n + a_p z^{n-p} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$, где $p > n/2$, автор получил формулу $\mathrm{Sp}\, A^{2p} = p a_p^2$. Следовательно, искомый корень может быть найден по формуле $\sqrt[2p]{p a_p^2}$. Имеется числовой пример. Г. И. Бирюк

9 В290. О приближении корней из положительных чисел. Turowicz A. B. Sur l'approximation des racines de nombres positifs. «Ann. polon. math.», 1960, **8**, № 3, 265—269 (франц.)

Ланкастер (Lancaster, M., J. Amer. Statist. Soc., 1942, **37**) показал, что последовательность $\{x_k\}$, где

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 2A}{x_k^3 + \frac{1}{2}A} \cdot \frac{x_k}{2}, \quad A > 0,$$

быстро сходится к $\sqrt[3]{A}$. Автор предлагает более общую формулу, которая позволяет быстро вычислять корни любой степени из положительных чисел. Пусть A и x_0 — произвольные положительные числа. Тогда последовательность $\{x_k\}$, где

$$x_{k+1} = \frac{(n-1)\,x_k^{n+1} + (n+1)Ax_k}{(n+1)\,x_k^n + (n-1)\,A}$$

и n — целое положительное число ($n \geqslant 2$), сходится к $\sqrt[n]{A}$. При $n = 3$ получается результат Ланкастера. Дана оценка скорости сходимости $|x_k - \sqrt[n]{A}| \to 0$. Рассмотрен пример. Д. Б. Тополянский

9 В291. Заметка к статье А. Б. Тюрович о приближении корней из положительных чисел. Mikolajska Z. Remarque sur la note de A. B. Turowicz sur l'approximation des racines de nombres positifs. «Ann. polon. math.», 1960, 8, № 3, 285—289 (франц.)

Тюрович (реф. 9В290) предложил интерационную формулу

$$x_{k+1} = \frac{(n-1)\,x_k^{n+1} + (n+1)Ax_k}{(n+1)\,x_k^n + (n-1)\,A}, \quad x_0 > 0,$$

для приближенного вычисления корня $\sqrt[n]{A}$ из положительного числа A, установив при этом скорость сходимости $|x_k - \sqrt[n]{A}| \to 0$. Автор показал, что основная идея, которой воспользовался Тюрович для установления соотношения

$$\mathrm{sgn}\,(x_k - x_{k+1}) = \mathrm{sgn}\,(x_0 - \sqrt[n]{A}) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и сходимости $x_k \to \sqrt[n]{A}$, легко может быть реализована в более общем случае последовательности

$$\{x_{k+1}\} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $$x_{k+1} = \frac{x_k\,[\psi(x_k) - \varphi(x_k^n - A)]}{\psi(x_k) + \varphi(x_k^n - A)}, \quad x_0 > 0,$$

а функции $\psi(x)$ и $\varphi(u)$ непрерывны и удовлетворяют следующим условиям

$$\psi(x)+\varphi(x^n-A)>0 \text{ при } x\geqslant 0,$$

$$\psi(x)-\frac{x+\sqrt[n]{A}}{x-\sqrt[n]{A}}\varphi(x^n-A)>0 \quad \text{при } x^n\neq A,$$

$\varphi(u)=-\varphi(-u)$, $\varphi(u)$ монотонна. В частности, положив $\varphi(u)=u$ и $\psi(x)=n(x^n+A)$, получаем последовательность, рассмотренную Тюровичем.

Д. Б. Тополянский

9 В292. Квадратурные методы для функций более чем одной переменной. Stroud Arthur H. Quadrature methods for functions of more than one variable. «Ann. N. Y. Acad. Sci.», 1960, **86**, № 3, 776—791 (англ.)

Обсуждаются методы приближенного интегрирования вида

$$\int\cdots\int_R f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\approx\sum_{i=1}^{p}A_i f(\nu_{i1},\ldots,\nu_{in}),$$

где f — функция n действительных переменных ($n\geqslant 2$), R — область n-мерного евклидова пространства, A_i — постоянные, не зависящие от f, $\nu_i=(\nu_{i1},\ldots,\nu_{in})$ — точки в указанном пространстве. Как указывает автор, в статье дан обзор наиболее важных результатов, полученных в этом направлении. Особо выделяются исследования, связанные с такими вопросами: многомерные интегралы и методы Монте-Карло, формулы с минимальным числом точек, применение квадратурных формул для численного решения дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных), различные методы исследования границ погрешности (в частности, по Мизесу), экстремальные задачи, ставящие своей целью нахождение для данного класса функций наилучших (при известных условиях) квадратурных формул. Рассмотрены примеры вычисления двух четырехмерных интегралов (даны таблицы для сравнения модификации метода Монте-Карло с 4 квадратурными формулами). Библ. 94 назв. Д. Б. Тополянский

9 В293. Общий приближенный метод вычисления многомерных интегралов. Hsu Lee-tsch C. A general approximation method of evoluating multiple integrals. «Tôhoku Math. J.», 1957, **9**, № 1, 45—55 (англ.)

9 В294. Некоторые приближенные формулы для интегрирования быстро колеблющихся и периодических функций. Hsu L. C. Some approximation formulas for the integration of violently oscillating functions and of periodic functions. «Sci. Rec.», 1959, **3**, № 11, 544—549 (англ.)

Пусть $\Phi(x, y)$ — непрерывная функция для $0\leqslant x\leqslant 1$, $-\infty<y<\infty$ и периодическая по y с периодом единица. Для полученного автором ранее аналога формулы Эйлера — Маклорена при предположении, что $\Phi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x до некоторого порядка (РЖМат, 1959, 9500), приводится оценка остаточного члена и дается аналогичная формула для случая, когда дифференцируемость $\Phi(x, y)$ не предполагается.

Теорема 1. Пусть непрерывная функция $\Phi(x,y_1,\ldots,y_k)$, определенная в области $D(a\leqslant x\leqslant b, |y_\nu|<\infty)$, имеет периоды ω_ν по y_ν ($\nu=1,\ldots,k$) соответственно и параметры $\{N_\nu\}$ стремятся к бесконечности, таким образом, что $N_{\nu+1}/N_\nu\to\infty$, когда $N_\nu\to\infty$ ($\nu=1,2,\ldots,k-1$). Тогда

$$\lim_{N_1\to\infty}\int_a^b\Phi(x,N_1x,\ldots,N_kx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\omega_1,\ldots,\omega_k}\int_a^b dx\int_0^{\omega_1}\ldots\int_0^{\omega_k}\Phi(x,y_1,\ldots,y_k)\,dy_1,\ldots,dy_k.$$

Доказательство ее основывается на предыдущей работе автора (реф.9В293). Для

$$J_m=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1,\ldots,dx_m,$$

где функция $f(x_1,\ldots,x_m)$ 2π-периодическая по каждой из переменных и имеет непрерывные частные производные до порядка p ($p>3$), приводятся следующие теоремы, которые доказываются также как и аналогичные теоремы в других работах автора (РЖМат, 1959, 4240; 1960, 2327).

Теорема 4. Пусть R — целое положительное число и $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ — совокупность таких целых чисел, что $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_m\geqslant 0$. Тогда для большого R

$$J_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt+O\left(\left(\frac{1}{R}\right)^p\omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right),$$

где

$$\varphi(t)\equiv f(R^{\alpha_1}t,\ldots,R^{\alpha_m}t).$$

Теорема 5. Если $N=R^m$ и $\varphi(t)\equiv f(R^{m-1}t,R^{m-2}t,\ldots,t)$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{1}{R^{m-1}}\right)^p\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^p\varphi(t)\right|<A \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

то для большого R

$$\left|J_m-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(\frac{2k\pi}{R},\frac{2k\pi}{R^2},\ldots,\frac{2k\pi}{R^m}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2A\zeta(p)\left(\frac{1}{N}\right)^{p/m}+O\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{p/m}\omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right),$$

где $\zeta(p)=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{n}\right)^p$, $\omega_p(\rho)$ — максимум модулей непрерывности производных порядка p. Приводятся примеры, иллюстрирующие применение некоторых результатов статьи к приближенному вычислению интегралов.

Л. А. Янович

9 В295. Полиномиальные приближения и метод Монте-Карло. Ермаков С. М., Золотухин В. Г. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 4, 473—476 (рез. англ.)

Предлагается новый метод вычисления кратных интегралов $\int_D f(Q)\varphi_0(Q)\,dQ$, заключающийся в построении случайной величины θ, близкой к постоянной, математическое ожидание которой равно искомому значению определенного интеграла. В качестве θ используется приближенное значение интеграла $I=\int_D f(Q)\,dQ$ по области D k-мерного евклидова пространства, получаемое посредством квадратурной формулы

$$\theta=\sum_{i=0}^{n}A_i f(Q_i)=\frac{\det\|f(Q_i),\varphi_1(Q_i),\ldots,\varphi_n(Q_i)\|_0^n}{w_{n+1}(Q_0,Q_1,\ldots,Q_n)}$$

с функцией плотности распределения случайных точек θ_i, равной

$$F(Q_0,Q_1,\ldots,Q_n)=\frac{1}{(n+1)!}w_{n+1}^2(Q_0,Q_1,\ldots,Q_n),$$

где

$$w_{n+1}(Q_0,Q_1,\ldots,Q_n)=$$
$$=\det\|\varphi_0(Q_i),\varphi_1(Q_i),\ldots,\varphi_n(Q_i)\|_0^n.$$

Доказывается, что математическое ожидание случайной величины θ равно искомому интегралу и что дисперсия случайной величины $\theta(Q_0,Q_1,\ldots,Q_n)$ равна

$$D^2\theta=\int_D f^2(Q)\,dQ-\sum_{i=0}^{n}[f(Q)\varphi_i(Q)\,dQ]^2.$$

Авторы отмечают, что изложенный метод является обобщением обычного метода Монте-Карло и включает последний в качестве частного случая при $n = 0$ и что доказанные две теоремы указывают на связь точечного интерполирования, разложения в ряд Фурье по ортонормированной системе и метода Монте-Карло.

В. Я. Евфанов

9 В296. О вычислении интеграла $\int_0^\infty (\sin^m t)/t^m\,dt$ по трапецеидальному правилу. Butler R. On the evaluation of $\int_0^\infty (\sin^m t)/t^m\,dt$ by the trapezoidal rule. «Amer. Math. Monthly», 1960, 67, № 6, 566—569 (англ.)

Формула Пуассона (Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ОГИЗ, 1948, стр. 82)

$$\sqrt{\alpha}\left\{\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n\alpha)\right\}=\sqrt{\beta}\left\{\frac{1}{2}g(0)+\sum_{n=1}^{\infty}g(n\beta)\right\},$$

где $\alpha>0$, $\alpha\beta=2\pi$, $g(\theta)=\sqrt{2/\pi}\int_0^\infty f(t)\cos\theta t\,dt$, в результате подстановки $\alpha=h$, $G(\theta)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,g(\theta)$ записывается в виде

$$\int_0^\infty f(t)\,dt=h\left\{\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)\right\}-2\sum_{n=1}^{\infty}G\left(\frac{2\pi n}{h}\right). \quad (1)$$

Исходя из (1), Феттис (РЖМат, 1956, 7659) предложил трапецеидальное правило с поправкой, когда косинус-трансформация Фурье $g(\theta)$ по величине достаточно мала. Автор рассматривает случаи, когда косинус-трансформация Фурье есть нуль и интеграл (1) точно представляется по трапецеидальной формуле. В случае $f(t)=(\sin^m t)/t^m$, где m — положительное целое число, $G(\theta)=0$ при $\theta\geqslant m$, если $m>1$, и при $\theta>1$, если $m=1$. Отсюда

$$I_m\equiv\int_0^\infty(\sin^m t)/t^m\,dt=$$

$$=\frac{h}{2}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\sin^m(rh)/(rh)^m\right\}$$

($h<2\pi$, если $m=1$, $h<2\pi/m$, если $m>1$) или

$$S_m(h)\equiv\sum_{r=1}^{m}\sin^m(rh)/r^m=I_m h^{m-1}-\frac{1}{2}h^m=$$

$$=\begin{cases}-(\pi^m/m!)\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{m}{j}\Phi_m\left\{\frac{(m-2j)h}{2\pi}\right\}\right]\\ (m=2k+1),\\ -(\pi^m/m!)\left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{m}{j}\Phi_m\left\{\frac{(m-2j)h}{2\pi}\right\}\right]\\ (m=2k)\end{cases}$$

при условии, что $0<h<2\pi$, если $m=1$ и $0\leqslant h<\frac{2\pi}{m}$, если $m>1$ (Φ_m — многочлены Бернулли m-го порядка). При $m\leqslant 4$ получается простая формула

$$I_m=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{E_{m-1}}{(m-1)!}+1\right\},$$

где E_{m-1} — эйлеровы числа. Д. Б. Тополянский

9 В297. Формулы второй степени точности для численного интегрирования. Stroud A. H. Numerical integration formalas of degree two. «Math. Comput.», 1960, 14, № 69, 21—26 (англ.)

В формуле

$$\int_R f(x)\,w(x)\,dx\approx\sum_i a_i f(\nu_i) \quad (1)$$

коэффициенты a_i и точки ν_i выбираются так, чтобы равенство выполнялось точно всякий раз, когда f есть многочлен второй степени. Здесь R есть область $(n+1)$-мерного пространства, $x=(x_0,\ldots,x_n)$, $\nu_i=(\nu_{i0},\ldots,\nu_{in})$ — точки и a_i — постоянные. Для решения соответствующей системы уравнений

$$\sum a_i=\int_R w\,dx,\ \sum a_i\nu_{ij}=$$

$$=\int_R x_j w\,dx,\ \sum a_i\nu_{ij}\nu_{ik}=\int_R x_j x_k w\,dx$$

используется аппарат матриц, закон инерции и теоремы о приведении матриц к треугольному виду. Аналогичная задача решается для формулы (1) в том случае, когда она точна для всякого многочлена f третьей степени. Область R считается центрально симметричной относительно начала координат и $w(x)$ — удовлетворяющей условию $w(-x)=w(x)$. В. И. Крылов

9 В298. О решении линейных систем при уравнивании геодезических сетей. Дроздов Н. Д. «Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр.», 1960, вып. 39, 83—88

Относительно линейных систем, к которым приводит задача об уравнивании геодезических сетей, исследуется вопрос об определении необходимой точности промежуточных операций при их решении для получения окончательного результата с заданной точностью.

Д. Б. Тополянский

9 В299. Метод выравнивания и его применения. Onicescu Octav. Une méthode d'ajustage et ses applications. «Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR», 1958, 2, № 3, 307—317 (франц.)

Автор указывает, что статья представляет первый раздел его работы и относится к кругу идей, раззитых в нескольких предыдущих его статьях (C. r. Acad. sci., 1927, 185, 27). В этом разделе рассматривается «выравнивание» (l'ajustage) в случае конечного числа значений. Пусть на плоскости x, y дано N точек $P_j(x_j, y_j)$ $(j=1,2,\ldots,N)$. Через каждую пару точек P_j, P_k $(j<k)$ проводится прямая $y=a_{jk}x+b_{jk}$, и каждой из этих C_N^2 прямых приписывается вес p_{jk} ($p_{jk}\geqslant 0$, $\sum_{j,k}p_{jk}=1$).

Тогда точки $\overline{P}_i(x_i,\overline{y}_i)$, где

$$\overline{y}_i=\sum p_{jk}y_{jk,i},\ y_{jk,i}=a_{jk}x_i+b_{jk},$$

коллинеарны. Далее рассматривается «выравнивание» при помощи многочленов, «выравнивание» в евклидовом пространстве n измерений и проблема выбора весов при помощи вариационного метода. Д. Б. Тополянский

9 В300. Векторные методы в сферической астрономии. II. Kustaanheimo Paul. On vector methods in spherical astronomy. II. «Comment. phys.-math. Soc. scient. fennica», 1960, 24, № 7, 13 pp. (англ.)

В предыдущей работе (РЖМат, 1961, 2В183) автор предложил новый метод решения некоторых вопросов сферической астрономии простыми средствами векторной алгебры. В реферируемой работе автор присоединяет к трем рассмотренным им векторным тождествам три дополнительных формы одного из них и указывает случаи применения. Рассмотрено пять примеров.

Д. Б. Тополянский

9 В301. Суммирование и оценка остатка одного класса медленно сходящихся тригонометрических рядов. Пак И. Н. «Тр. учебн. ин-тов связи. М-во связи СССР», 1960, вып. 4, 123—132

Определяется класс тригонометрических рядов, улучшающих сходимость преобразованием Абеля. Предлагается оценка остаточного члена и методика суммирования большого числа членов тригонометрических ря-

дов, часто встречающихся в задачах радиотехники и электросвязи. Показывается, что преобразование Абеля и полученные оценки могут быть использованы при вычислении некоторых числовых рядов. Резюме автора

9 В302. Замечание об аппроксимации e^x. Lubkin S. A note on approximating e^x. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1960, 3, № 12, 649 (англ.)

Рассматривается приближенная формула

$$e^x \approx \left(\frac{6n^2 + 4nx + x^2}{2n(3n - x)}\right)^n.$$

Приведена таблица значений погрешности этой формулы для $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ и $x = 1$. Например, при $n = 64$ $\varepsilon = 0{,}1 \cdot 10^{-6}$.

9 В303. Быстросходящиеся выражения e^x. Berin A. Rapidly convergent expressions for evaluating e^x. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1960, 3, № 9, 500 (англ.)

Пользуясь формулой

$$e^x \approx \left(\frac{n + x}{n}\right)^{\frac{x}{\ln\left(\frac{n+x}{n}\right)}},$$

$n \to \infty$, автор выводит выражения, которыми можно воспользоваться для эффективного вычисления e^x.

Л. И. Алихашкин

9 В304. Применение методов Монте-Карло при решении многомерных задач. Hammersley J. M. Monte Carlo methods for solving multivariable problems. «Ann. N. Y. Acad. Sci.», 1960, 86, № 3, 844—874 (англ.)

Дается общий обзор теории методов Монте-Карло и их применений. Описывается круг задач, для которых целесообразно применять методы Монте-Карло. В качестве примера приводится решение задачи о кратчайшем маршруте морского судна, которому необходимо побывать в «n» портах при большом «n». Показано, что использование методов Монте-Карло позволяет свести решение этой задачи с «$2n$» переменными ($2n$ координат, соответствующих «n» точкам на плоскости) к решению уравнения с одной переменной. Далее рассматривается задача линейной интерполяции функции большого числа переменных $f(x_1, ..., x_n)$ внутри n-мерного единичного куба, если она задана на всех вершинах этого куба. Оказывается, что функция $f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, где

$$\xi_i = \begin{cases} 0 \text{ с вероятностью } 1 - x_i, \\ 1 \text{ с вероятностью } x_i, \end{cases}$$

представляет собой несмещенную оценку для линейно экстраполированной $f(x_1, \ldots, x_n)$. Если процедуру повторять N раз и в качестве оценки брать среднее полученных результатов, то дисперсия такой оценки будет $\gamma < \sqrt{(Mn/2N)}$, где M — некоторая постоянная. Рассматривается вопрос о минимальном N, достаточном для получения оценки заданной точности. Этот метод распространяется на случай нелинейной интерполяции. Излагается применение методов Монте-Карло при вычислении матричного произведения $C = AB$, где A и B — матрицы порядка $l \times m$ и $m \times n$ соответственно (при большом «m»). Показано, что

$$\gamma_{ij} = \frac{m}{n} \sum_{r=1}^{N} a_{ik_r} b_{k_r j},$$

где $k_1, \ldots, k_N$ — случайно выбранные N элементов из i-й строки матрицы A, является несмещенной оценкой для элемента c_{ij} матрицы C. Дается выражение для дисперсии такой оценки. Рассматривается вопрос о нахождении доминирующего собственного вектора матрицы A, т. е. собственного вектора, соответствующего наибольшему по модулю собственному значению этой матрицы. Показывается, что эта задача сводится к вычислению матричного произведения. Рассматривается вопрос о представлении функции многих переменных в виде суммы произведений функций одной переменной с минимальным числом слагаемых. Излагается метод оценки кратных интегралов $I = \int_R f(x)\,dx$. Показано, что $\sum_j w_j f(\xi_j)$, где ξ_j — случайный вектор с равномерным распределением в R, а w_j — весовые коэффициенты с $\sum w_j = 1$, представляет несмещенную оценку I. Описывается метод решения интегральных уравнений вида

$$M(x) = M_0(x) + \int_R K(x, y) M(y)\,dy,$$

где X, Y — векторы, M_0 и K — известные функции, R данная область пространства. Выводится выражение для несмещенной оценки $M(x)$. Рассмотрен также метод оценки решения уравнений в частных производных на примере уравнения Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$. Сравниваются между собой классические методы и метод Монте-Карло для численного интегрирования. Показано, что метод Монте-Карло целесообразно использовать в случае трех и большего числа переменных. Получены выражения для точности классических методов и метода Монте-Карло численного интегрирования. Библ. 39 назв.

Б. А. Власюк

9 В305. Расчет обратного рассеяния гамма-лучей при помощи метода Монте-Карло. Berger Martin J., Raso Dominic J. Monte Carlo calculations of gammaray backscattering. «Radiation Res.», 1960, 12, № 1, 20—37 (англ.)

Описывается расчет методом Монте-Карло на вычислительной машине ИБМ-704 обратного рассеяния (альбедо) гамма-лучей, падающих на полубесконечный отражатель. Вычисляются энергетический спектр и угловое распределение отраженных фотонов, угловое распределение отраженной энергии, угловое распределение отраженной дозы, средняя энергия отраженных фотонов, среднее направление отраженных фотонов, числовое альбедо, энергетическое альбедо и альбедо дозы. При реализации метода Монте-Карло учитывается вклад в историю движения фотона от фотоэффекта, вклад от эффекта Комптона и вклад от действия закона Клейна—Нишины. Предполагается, что каждое соударение есть комптоновское рассеяние, а для введения поправки на поглощение вылетающим из среды фотонам приписывается определенный статистический вес, который вычисляется аналитически. При этом альбедо равно сумме статистических весов фотонов, вылетевших из среды до того, как их энергия стала меньше величины граничной энергии E_c. Граничная энергия при помощи численных экспериментов была выбрана равной 0,01 *Мэв* для водорода, 0,025 *Мэв* для воды и бетона, 0,05 *Мэв* для железа и 0,1 *Мэв* для олова и свинца. Результаты вычислений приводятся в виде восьми таблиц и пяти графиков. Приведенные результаты находятся в хорошем согласии с опубликованными ранее работами по вычислению числового альбедо для алюминия и энергетического альбедо для воды. Процедура по осуществлению и анализу 5000 историй движения фотона для пяти значений угла падения занимала около 50 мин. машинного времени. Оценка точности вычислений была сделана экспериментально разбиением групп из 5000 историй на подгруппы по 1000 историй каждая. Авторы указывают, что полный материал по проделанным вычислениям сведен в 37 таблиц, остальная часть которых еще не опубликована, и считают, что использованный метод вычислений является самым быстрым методом вычисления альбедо гамма-лучей от полубесконечного отражателя среди известных в настоящее время методов.

В. Я. Евфанов

9 В306. Корреляции при получении псевдослучайных чисел. Coveyou R. R. Serial correlation in the generation of pseudo-random numbers. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, **7**, № 1, 72—74 (англ.)

Сообщаются рекомендации по выбору целых чисел λ и μ, что позволяет уменьшить корреляции в последовательности псевдослучайных чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots$, получаемых по формуле

$$x_{n+1} \equiv \lambda x_n + \mu \pmod{P}, \qquad (1)$$

где $x_0 = a$, $0 \leqslant x_n < P$, $P = \alpha^q$ и $\alpha = 2$ или 10 для вычислительной машины, работающей в двоичной или десятичной системе соответственно. Для определения λ и μ автор подсчитал коэффициент корреляции

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \frac{1 - 6\frac{\mu}{P}\left(1 - \frac{\mu}{P}\right)}{\lambda} \qquad (2)$$

и рекомендует проверять корреляцию между текущим случайным числом и его ближайшим десятым или двадцатым соседним членом последовательности (1). Отмечается, что выбор очень малых значений λ и μ является неудачным. В. Я. Евфанов

9 В307. Новый способ получения псевдослучайных чисел. Rotenberg A. A new pseudo-random number generator. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, **7**, № 1, 75—77 (англ.)

Сообщается о получении и испытании на вычислительной машине ИБМ-704 последовательности случайных чисел x_i, получаемых по формуле

$$x_{i+1} = (2^a + 1)\, x_i + c \pmod{2^{35}}, \qquad (1)$$

которая дает псевдослучайные числа с полным периодом $n = 2^P$, где P — число двоичных разрядов машины, a — целое число, которое больше или равно двум, и c — целое нечетное число. Преимущество этого метода по сравнению с конгруэнтным методом, использующим операцию умножения, состоит в том, что в предлагаемом методе операции умножения заменяются сдвигами, метод реализуется 14 командами вместо 28 и он не требует многократно используемого регистра. На получение одного псевдослучайного числа по формуле (1) машина ИБМ-704 расходует 168 мксек. Испытание на неслучайность чисел x_i при $a=7$ и $c=1$ дало удовлетворительные результаты. Коэффициент корреляции последовательности (1) для соседних ее членов при этих значениях a и c равен 0,8%. Для уменьшения этого коэффициента можно увеличивать a или выбирать такое c, что числитель в выражении Ковью (реф. 9В306) для коэффициента корреляции имеет нулевое значение. В. Я. Евфанов

9 В308. Свыше 300 областей применения вычислительных машин. Macdonald Neil. Over 300 areas of application of computers. «Computers and Automat.», 1960, **9**, № 1, 13—15 (англ.)

Перечисляются 310 областей техники, науки и финансовой области, в которых за последние 15 лет интенсивно применялись вычислительные машины в Гарварде. Среди задач, вошедших в перечень, содержатся, например, следующие: символическое дифференцирование, интегрирование функций, линейное программирование, медицинская диагностика, ряд военных задач, механический перевод с одного языка на другой, анализ и проектирование цепей и др. Х. М. Коган

9 В309. Рациональная статистическая обработка результатов измерений, содержащих от 5 до 20 отдельных значений. Martin H. Rationelle statistische Auswertung von Meßergebnissen bei 5 bis 20 Einzelwerten, «Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin», 1959, **1**, № 7-10, 389—393 (нем.)

9 В310. Пересечение прямой линии со спиралью. Bates Francis. «Intersection of straight line with spiral» by T. F. Hickerson. Discussion. «J.Surv. and Mapp. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs», 1960, **86**, № 2, Part 1, 41—45 (англ.)

9 В311. Использование метода минимизации суммы абсолютных величин вычетов для компенсации потерь мощности в линейном анализаторе с трансформаторами тока. Černý Václav, Marek Alois. Použití metody minimisace součtu absolutních hodnot residuí ke kompensaci ztrátových výkonů u lineárního analysátoru s proudovými měniči, «Stroje zpracov. inform.», 1958, № 6, 209—226 (чешск.; рез. русск., англ.)

Исследуется группа итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{k} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad n \lesseqgtr k, \qquad (1)$$

на линейном анализаторе с трансформаторами тока. Коэффициенты a_{ij} системы (1) моделируются с помощью изменения числа витков обмоток трансформаторов, неизвестные x_j из (1) изображаются отношением токов в контурах трансформаторов. Ввиду неизбежных потерь в электрических и магнитных цепях трансформаторов нельзя найти точные решения уравнений (1). Рассматривается метод, использующий вспомогательные обмотки на всех трансформаторах для компенсации потерь мощности. Решение уравнений (1) получается при одновременном исчезновении напряжения на вспомогательных обмотках каждого трансформатора. Отклонение системы от требуемого равновесия исследуется с помощью оценочной функции $Q(x_0, x_1, \ldots, x_k)$, построенной в виде суммы n выпуклых функций f_i вычетов уравнений (1). При настройке анализатора функция Q приводится к минимуму. В статье описана реальная схема для осуществления оценочной функции Q. Приведены без доказательства теоремы об основных свойствах функции Q в зависимости от существования и типа решения системы (1). Особо выделен вопрос о применимости функции Q, построенной как сумма абсолютных величин вычетов системы (1). Автор утверждает, что такая функция в некоторых случаях является более выгодной, чем применяемая при методе, использующем сумму квадратов вычетов системы (1). Дан пример нахождения собственных значений матрицы 3-го порядка. В. Л. Евтеев

9 В312. Построение однопараметрических кривых без таблиц и логарифмической линейки. Woodworth F. M. Plotting one-parameter curves without tables or slide rule. «Design News», 1960, **15**, № 8, 74—77 (англ.)

Графические способы осуществления элементарных действий над числами описываются символическими обозначениями, образующими выражения, названные графическими операторами. Например, графическое умножение $a \cdot b = c$, сводящееся к построению подобных треугольников по данным отрезкам $\bar{a}$, $\bar{b}$ и единичному отрезку, может быть описано такой последовательностью действий: 1) в прямоугольной системе координат помечаются точки $(-1, 0)$, $(0, a)$ и $(b\ -1, 0)$; 2) точки $(-1, 0)$ и $(0, a)$ соединяются прямою; 3) проводится прямая $x = b - 1$; 4) линии из 2) и 3) продолжаются до их пересечения; 5) координаты точек пересечения из 4) суть $(b-1, ab)$. Соответствующий графический оператор имеет вид $G[ab] = [(-1, 0) \to (0, a) : (b-1, ab)]$. Аналогичные обозначения вводятся и для других действий, описываемых разными графическими операторами $G[f(u)]$. Сложные операторы могут быть несколько упрощены применением субоператоров, действия над которыми в свою очередь описываются символически. Среди прочих символических обозначений введены и таковые для преобразования координат. Рассмотрено несколько конкретных примеров. Автор усматривает в графических операторах некоторую аналогию с про-

граммированием для цифровых машин, полагая, что применение их может дать экономию времени. Отмечается, что графические операторы могут быть приложены также к функциям нескольких переменных и к комплексным функциям. А. Б. Штыкан

9 В313. Транспарант для графического вычисления значений многочлена при комплексных значениях аргумента. Доморяд А. П., «Уч. зап. Ташкентск. гос. пед. ин-т», 1957 (1959), вып. 7, 77—79

Если многочлен

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (1)$$

с коэффициентами

$$a_k=\alpha_k+\beta_k\cdot i \qquad (2)$$

записать в форме, соответствующей вычислению по схеме Горнера, то нахождение значений $f(z)$ при частных значениях

$$z=z_m=x_m+y_m\cdot i=r_m(\cos\varphi_m+i\cdot\sin\varphi_m) \qquad (3)$$

довольно просто осуществляется известным графическим способом последовательного умножения и суммирования векторов, изображающих комплексные числа $z=z_m$ и a_k $(k=0, 1, \ldots, n)$. Предложенный транспарант представляет собою лист кальки с нанесенными на нем параллельными прямыми. Для вычисления искомого значения (1) в прямоугольной координатной системе сначала наносится полигон $OA_0A_1\ldots A_n$, составленный из векторов $\overline{OA_0}$, $\overline{A_0A_1}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$, изображающих комплексные числа (2), а затем вектор (3). Указанный полигон автор называет схемой многочлена $f(z)$. Последовательное наложение транспаранта на схему многочлена и накалывание точек позволяют обойтись без промежуточных графических построений, с которыми связано обычное умножение и сложение векторов. Ход графического решения и способ применения транспаранта пояснены на числовом примере для многочлена третьей степени. А. Б. Штыкан

9 В314. Возможный графический способ приближенного решения дифференциальных уравнений вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы. Osiński Zbigniew. Pewien wykreślny sposób przybliżonego rozwiązywania różniczkowego równania ruchu drgań wymuszonych układu o jednym stopniu swobody. «Zesz. nauk. Politechn. warsz.», 1960, № 45, 127—136 (польск.; рез. русск., англ.)

Дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}+R(\dot{x})+\varphi(x)=f(t)$$

представляется в виде

$$dv/dt=-R(v)-\varphi(x)+f(t) \qquad (1)$$

и в виде эквивалентной ему системы

$$\begin{aligned} v\cdot dv/dx&=-R(v)-\varphi(x)+f(t),\\ dx/dt&=v. \end{aligned} \qquad (2)$$

По координатам кривых, изображающих в совмещенных с плоскостью чертежа прямоугольных координатных системах vOx, xOt, vOt данные функции, входящие в (1), (2), простыми графическими построениями определяются направления касательных в дискретных точках интегральных кривых $v=v(x)$, $x=x(t)$, $v=v(t)$. По найденным направлениям строятся приближенные интегральные кривые в соответствии с первым приближением по Эйлеру, т. е. они аппроксимируются ломаными, составленными из отрезков касательных, направления которых предполагаются постоянными в конечных интервалах изменения аргументов. Даны некоторые указания о выборе масштабов. Библ. 6 назв. А. Б. Штыкан

9 В315 К. Номограммы комплексных гиперболических функций. Rybner Jørgen. Nomogrammer over komplekse hyperbolske funktioner, 2nd ed. Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1955, 39 pp.+60 charts, Dan. kr. 44.00 (англ.)

9 В316 К. Математические методы для цифровых вычислительных машин. Eds Ralston Anthony, Wilf Herbert S. Mathematical methods for digital computers. New York — London, John Wiley and Sons, Inc., 1960, xii, 293 pp., ill., 9.00 doll. (англ.)

Книга состоит из 26 глав, написанных разными авторами, в которых отражены все основные направления современного численного анализа (вычисление элементарных функций, обращение матриц прямыми методами и методом Монте-Карло, решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса—Зейделя и методом сопряженных градиентов, вычисление собственных значений методом Якоби, численное интегрирование начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений экстраполяционными и интерполяционными разностными методами и методом Рунге-Кутта, численное интегрирование краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, численное решение параболических дифференциальных уравнений, итерационные методы и метод Монте-Карло для решения систем эллиптических сеточных уравнений, решение гиперболических дифференциальных уравнений методом конечных разностей и методом характеристик, численное решение алгебраических уравнений, методы численной квадратуры, вычисление кратных интегралов при помощи метода Монте-Карло, гармонический анализ, решение задач линейного программирования, анализ сетей, различные вопросы статистики и пр.). Все главы, за исключением первой главы: «Образование элементарных функций», которая по своим размерам заметно превосходит каждую из остальных глав, состоят из десяти параграфов: 1) Введение. 2) Математический анализ (самый большой параграф). 3) Рецептура (собрание расчетных формул). 4) Блок-схема программы. 5) Описание блок-схемы. 6) Подпрограммы. 7) Простой числовой пример. 8) Необходимое количество запоминающих ячеек вычислительной машины. 9) Оценка времени работы вычислительной машины. 10) Литература. Книга может служить справочным руководством по ряду наиболее важных вопросов вычислительной математики. Для нее характерна актуальность и современность рассматриваемых вопросов. В. К. Саульев

ТАБЛИЦЫ

9 В317. Упрощенные таблицы натуральных значений тригонометрических функций. Wolf Ernest. Table simplifiée des valeurs naturelles des fonctions trigonométriques. «Rev. géom.-experts et topogr. franç.», 1960, № 4, 205—211 (франц.)

Приведена и описана компактная таблица натуральных значений синуса и косинуса. Значения функций даны с пятью десятичными знаками, аргумент задан через 0,5 града ($x=0,(0,^g5)100^g$). Описан метод нелинейной интерполяции, дающий возможность получать значения синуса и косинуса для аргумента, задаваемого с точностью до $0,^g001$. Оценка точности этого интерполяционного метода не приводится. Для расчета интерполяционных поправок приведена специальная номограмма из выровненных точек, инструкция к которой, однако, недостаточно подробна. Х. М. Коган

9 В318. Таблицы волновых функций для водорода. Green Louis C., Matsushima Satoshi, Kolchin Eleanor K. Tables of the continuum wave functions for hydrogen. «Astrophys. J. Suppl. Ser.», 1958, 3, № 34, pp. 459—493, ill. (англ.)

Решение уравнения Шрёдингера для атома водорода содержит сомножитель (радиальная компонента волно-

вой функции непрерывного спектра водорода), который после нормировки по интервалу энергии принимает вид:

$$R^{N(\varepsilon)}(\varepsilon, l; \rho) = \frac{1}{\pi^{1/2} l^{1/4}} \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{e^{i\pi k/2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2} + m - k\right)}{\Gamma(2m+1)} \right| \times$$
$$\times e^{-(i\pi/2)(m+1/2)}\, M_{k,m}(z),$$

где

$$M_{k,m}(z) = z^{m+1/2} e^{-z/2}\, {}_1F_1(1/2 + m - k;\ 2m+1;\ z) -$$

функция Уиттекера,

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \ldots -$$

вырожденная гипергеометрическая функция и

$$z = 2ie^{1/2}\rho;\ k = -i\frac{Z}{\varepsilon^{1/2}};\ m = l + 1/2,\ Z -$$

заряд ядра. Используя асимптотическое разложение для функции Уиттекера, авторы находят такое же разложение для $R^{N(\varepsilon)}(\varepsilon, l; \rho)$. Приводятся таблицы функции $R^{N(\varepsilon)}(\varepsilon, l; \rho)$, причем ее значения в окрестности начала координат находятся при помощи ряда, а остальные значения — численным интегрированием дифференциального уравнения

$$d^2R/d\rho^2 + [(\varepsilon + 2Z/\rho) - l(l+1)/\rho^2]\, R = 0.$$

Результаты, полученные интегрированием, проверялись сравнением со значениями, полученными при помощи рядов. Приводятся 11 таблиц для $R^{N(\varepsilon)}(\varepsilon, l; \rho)$, соответствующие значениям $\varepsilon = 0{,}00;\ 0{,}01;\ 0{,}02;\ 0{,}05;\ 0{,}10;\ 0{,}20;\ 0{,}50;\ 1{,}00;\ 2{,}00;\ 5{,}00;\ 10{,}00$. В каждой таблице для l берутся значения: 0; 1; 2; 3. Переменная ρ меняется от 0 до 49,92. Интервал для ρ выбран так, чтобы для всех функций при одном и том же ε, за исключением $\varepsilon = 10$, шеститочечная интерполяция давала значения, содержащие погрешность не более половины единицы последнего разряда. В случае $\varepsilon = 10$ погрешность может достигнуть до трех единиц последнего разряда. Все таблицы даны с четырьмя десятичными знаками. Данные таблицы составляют непосредственное дополнение к известным таблицам волновых функций Кулона (Tables of Coulomb wave functions, vol. 1, Washington, Government Printing Office, 1952), причем при их использовании предполагается наличие последних таблиц под рукой. Таблицы вычислялись на вычислительной машине IBM Card— programmed Electronic Calculator of the Watson Scientific Computing Laboratory. М. К. Керимов

9 В319. Таблицы функций Уиттекера. Волновые функции в кулоновом поле. Часть 2.—. Tables of Whittaker functions. (Wave functions in Coulomb field). Part 2. «Rept. Numerical Comput. Bureau», 1959, № 11, 53 pp. (англ.)

Приведены с пятью десятичными знаками значения функции $F_{\xi,0}(x) = \sqrt{2r} J_1(\sqrt{8r})$ для $k = 0{,}00\,(0{,}01)\,1{,}00$, $r = 0\,(0{,}1)\,10$ ($\xi = 1/k$, $x = 2kr$). См. также РЖМат, 1957, 3571.

9 В320. Таблицы интегралов Матье для внутренней задачи вращения. Herschbach Dudley R., Tables of Mathieu integrals for the internal rotation problem. «J. Chem. Phys.», 1957, 27, 975 (англ.)

9 В321. Свойства и таблицы интегралов Айри — Харди. Cerrillo M. V., Kautz W. H. Properties and tables of the extended Airy-Hardy integrals. Res. Lab. Electronics. Massachusetts Inst. Technology, Cambridge, Mass., Tech. Rep., 1951, 144, III+61 pp. (англ.)

Приведены (с семью десятичными знаками) таблицы и графики вещественной и мнимой частей функций

$$Ah_{1,3}(B) \equiv 3^{-1/3}\,\mathrm{Ai}(-3^{-1/3}B) \text{ и } e^{\mp\pi i/3} Ah_{1,3}(Be^{\pm 2\pi i/3})$$

и модули и фазы функции $Ah_{1,3}(B)$ (Ai — интеграл Айри) для $\arg B = 0°\,(7°{,}5)\,180°$, $|B| = 0{,}0\,(0{,}2)\,4{,}0$.
F. W. J. Olver

Из Math. Revs, 1958, **19**, № 4.

9 В322. Таблицы интерполяционных коэффициентов Эверетта. Fox L. Tables of Everett interpolation coefficients. «Math. Tables. Nat. Phys. Lab.», 1958, **2**, 61 pp. (англ.)

В первом томе данной серии таблиц (РЖМат, 1960, 8358 К) были приведены следующие интерполяционные формулы, полученные из формулы Эверетта модификацией разностей:

$$f_p = (1-p) f_0 + p f_1 + E_2(p)\,\delta_m^2 f_0 +$$
$$+ F_2(p)\,\delta_m^2 f_1 + M_4(p)\,\gamma^4 f_0 + N_4(p)\,\gamma^4 f_1,$$
$$f_p = (1-p) f_0 + p f_1 + E_2(p)\,\delta_m^2 f_0 +$$
$$+ F_2(p)\,\delta_m^2 f_1 + P_4(p)\,\beta^4 f_0 + Q_4(p)\,\beta^4 f_1,$$

где

$$\delta_m^2 = \delta^2 - 0{,}184\delta^4 + 0{,}0380818\delta^6 - 0{,}0083036\delta^8 +$$
$$+ 0{,}00186\delta^{10} - 0{,}00042\delta^{12} + \ldots,$$
$$1000\gamma^4 = \delta^4 - 0{,}2782692\delta^6 + 0{,}068489\delta^8 -$$
$$- 0{,}01643\delta^{10} + 0{,}00392\delta^{12} - \ldots,$$
$$M_4(p) = 1000\,\{E_4(p) + 0{,}184 E_2(p)\},$$
$$N_4(p) = 1000\,\{F_4(p) + 0{,}184 F_2(p)\},$$
$$\beta^4 = 10\gamma^4,\ P_4(p) = 0{,}1 M_4(p),\ Q_4(p) = 0{,}1 N_4(p).$$

Эти формулы очень удобны при составлении многозначных таблиц, но содержат коэффициенты $E_2(p)$, $F_2(p)$, $P_4(p)$, $Q_4(p)$, для которых необходимо иметь соответствующие таблицы. Автор приводит здесь таблицы этих коэффициентов для $p = 0\,(0{,}0001)\,0{,}5000$, причем таблицы $E_2(p)$, $F_2(p)$ даны с девятью десятичными знаками, а таблицы $P_4(p)$, $Q_4(p)$ — с пятью десятичными знаками. Таблицы пригодны и для интервала $0{,}5 \leqslant p \leqslant 1{,}0$, так как справедливы соотношения $E_2(1-p) = F_2(p)$, $P_4(1-p) = Q_4(p)$. Максимальная погрешность таблиц не превышает половины единицы последнего десятичного разряда. Шаг выбран настолько малым, что линейная интерполяция по таблицам вносит в значения f незначительные погрешности. В конце книги приводятся необходимые формулы численного дифференцирования для табулируемой функции и указывается метод их вычисления. М. К. Керимов

9 В323 К. Чеймберсовские краткие шестизначные математические таблицы. Comrie L. J. Chambers's shorter six — figure mathematical tables. London — Edinburgh, W. & R. Chambers, Ltd. 1959, xxvi, 387 pp., 15 sh. (англ.)

В 1944 г. исполнилось 100 лет со времени выхода в издательстве Чеймберса первых чеймберсовских таблиц, составленных А. Беллом (Bell A., Chambers's mathematical tables, consisting of logarithmic and other tables required in the various branches of practical mathematics, 1844, xxxi+316 pp.) и выдержавших много изданий. Автор настоящей книги поставил задачу — составить универсальную справочную книгу по наиболее употребительным на практике таблицам с учетом современных требований науки и практики. Им были составлены двухтомные «Чеймберсовские шестизначные математические таблицы» (Chambers's six — figure mathematical tables vol. 1, Logarithmic values, 600 pp., vol. 2, Natural values, 612 pp.), на основе которых составлены настоящие краткие таблицы. Автор пишет, что для очень большого чис-

ла практических задач достаточны шестизначные математические таблицы. В книгу включены следующие таблицы lg x для $x=1000(1)10000$; lg sin x, lg tg x для $x=0°(10'')1°20'$; lg cos x малых углов и lg sin x больших углов; lg sin x, lg cos x, lg tg x, lg ctg x для $x=1°20'(10'')10°(1')45°$; sin x, cos x, tg x, ctg x, sec x, cosec x для $x=0°(1')45°$; sin x, cos x в радианной мере для $x=0(0,1)10,4$; $10(1)54$; шести тригонометрических функций в радианной мере для $x=0(0,001)1,6$; e^x, e^{-x}, sh x, ch x, th x, cth x для $x=0(0,001)3(0,01)5$; e^{-x}, th x, cth x для $x=5(0,01)6$ e^x для $x=5(0,01)10(0,1)50$; ln x для $x=1(0,001)10$; обратные тригонометрические и гиперболические функции для $x=0(0,01)3(0,1)13(1)100$; степени (квадраты, кубы, четвертые и пятые степени), корни (квадратные, кубичные, четвертой и пятой степени), обратные величины, обратные величины квадратов чисел, обратные величины квадратных корней, факториалы, логарифмы факториалов, разложение на простые множители для чисел от 1 до 1000; простые числа от 1 до 12919; интерполяционные коэффициенты Бесселя; таблицы перевода из градусной меры в радианную и обратно; таблица пропорциональных частей, различные физические и другие константы и т. п. В книгу включено большое число полезных формул (численного дифференцирования, интегрирования, интерполяционные формулы, численного решения дифференциальных уравнений, таблица интегралов, ряды и т. п.). Книга издана на хорошей бумаге, материал расположен весьма удачно.

М. К. Керимов

9 В324 К. Математические таблицы для аппроксимации геофизических аномалий и редукций интерполяционными многочленами. Казинский В. А. М., АН СССР, 1959, 90 стр., илл., 5 р. 75 к.

Таблицы составлены для применения в подземной гравиметрии, для обработки надземных и морских гравитационных измерений, для изучения границ раздела различных глубинных структур по аномалиям силы тяжести, для аппроксимации вертикального градиента силы притяжения, порождаемой любым геологическим телом, для моделирования элементов гравитационных полей, для определения плотности пород и рудных тел и т. п. После теоретической части в книге протабулированы функции:

$$\Phi_z = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 10^{-3} \quad (x = 0{,}00\,(0{,}25)\,3{,}00;\ y = 0\,(0{,}25)\,3{,}00;\ 3{,}50;\ 4{,}00;\ 5{,}00;\ 6{,}00;\ z = 0\,(0{,}1)\,1{,}2(0{,}3)\,3{,}0;\ 3{,}5;\ 4{,}0;\ 5{,}0;\ 6{,}0;\ x = 3{,}50\,(0{,}50)\,6{,}00:\ y = 0\,(0{,}50)\,2{,}00\,(1{,}00)\,6{,}00;\ z = 0\,(0{,}1)\,0{,}5\,(0{,}5)\,3{,}0\,(1{,}0)6{,}0,\ x = 10{,}0\,(5{,}0)\,25{,}0;\ 50{,}0;\ 100{,}0;\ 200{,}0;\ 500{,}0:\ y = 0\,(0{,}5)\,3{,}0\,(1{,}0)\,10{,}0\,(5{,}0)\,25{,}0;\ 50{,}0;\ 100{,}0;\ 200{,}0,\ z = 0\,(0{,}5)\,2{,}0\,(1{,}0)\,10{,}0\,(5{,}0)\,25{,}0;\ 50{,}0;\ 100{,}0;\ 200{,}0;\ 500{,}0),$$

$$\Phi_{xy} = \frac{x}{\rho^3}\cdot 10^{-3},\ \bar{\Phi}_{xz} = \frac{x}{\rho^3}\cdot 10^{-3}, \quad (x = 0{,}25\,(0{,}25)\,4{,}00,\ z = 0\,(0{,}25)\,3{,}00,\ y = 0\,(0{,}1)\,1{,}2\,(0{,}3)\,3{,}0),\ \Phi_\Delta = \left[\frac{y^3}{3\rho^3}\frac{1}{x^2z^2} - \frac{x^2}{(x^2+z^2)^2}\left(\frac{y}{\rho} - \frac{y^3}{3\rho^3}\right)\right]\cdot 10^{-3}\ (x = 0{,}00(0{,}25)4{,}00,\ z = 0\,(0{,}25)\,3{,}00,\ y = 0\,(0{,}1)\,1{,}2\,(0{,}3)\,3{,}0),\ \bar{\Phi}_\Delta = \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\left(\frac{z}{\rho} - \frac{z^3}{3\rho^3}\right)\cdot 10^{-3}\ (x = 0{,}00\,(0{,}25)\,4{,}00,\ y = 0\,(0{,}25)\,3{,}00 \text{ и } z = 0\,(0{,}1)\,1{,}2\,(0{,}3)\,3{,}0),\ \Phi_{xz} = \frac{xz}{(x^2+z^2)^2}\left(\frac{y}{\rho} - \frac{y^3}{3\rho^3}\right)10^{-3},\ \Phi_{xy} = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\left(\frac{z}{\rho} - \frac{z^3}{3\rho^3}\right)\cdot 10^{-3}\ (x = 0{,}25\,(0{,}25)\,4{,}00;\ z = 0(0{,}25)3{,}00,\ y = 0(0{,}1)1{,}2(0{,}3)3{,}0),\ \Phi_{yz} = \frac{z}{\rho^3}\cdot 10^{-3},\ \bar{\Phi}_{yz} = \frac{y}{\rho^3}\cdot 10^{-3}\ (x = 0{,}00\,(0{,}25)\,4{,}00,\ z = 0(0{,}25)3{,}00,\ y = 0(0{,}1)1{,}2(0{,}3)3{,}0),\ \Phi_{zz} = \frac{\Delta g}{r^2} = \frac{\Delta g}{x^2+y^2}\times 10^{-3}\ (r = 0(1)10(2)16{,}20;\ 25;\ 35;\ 50;\ 100;\ 200,\ \Delta g = 1(1)6;\ 8;\ 10),\ 2F(\psi) = \sin\psi\left(\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi + \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right)\cdot 10^{-3}\ (\psi = 0°(0{,}5°)1°(1°)20°(2°)40°(4°);\ \psi = 100°\,(5°)\,180°,\ \Delta g = 1\,(1)\,10),\ S(\psi) = \frac{206265}{2\gamma}\cos\frac{\psi}{2}\times\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 12\sin\frac{\psi}{2} - 32\sin^2\frac{\psi}{2} + \frac{3}{1+\sin\frac{\psi}{2}} - 12\sin^2\frac{\psi}{2}\times\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right]\cdot 10^{-3}\ (\psi = 0°0'\ (0°3')\ 1°00'(1°)20°\ (2°)\,40°\ (4°)\,96°,\ \psi = 100°\,(5°)\,180°,\ \Delta g = 1\ (1)\ 10).$$

Кроме того, приводятся номограмма числовых значений функций $\Phi_z = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\Phi_{zz} = \frac{\Delta g}{r^2} = \frac{\Delta g}{x^2+y^2}$ и $\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ для определения аномалий и редукций (I_z), вертикальных и горизонтальных градиентов силы тяжести (I_{zz}, I_{xz}, I_{yz}) и элементов магнитного поля (H и Z), а также интерполяционная сетка для аппроксимации вертикального градиента силы тяжести и план распределения аномалий шарового тела.

Замеченные референтом опечатки: таблица № 3 отсутствует, а № 2 повторяется дважды; на стр. 64 вместо $z=2{,}71$ должно быть $z=2{,}75$; на стр. 81 вместо $y=3{,}2$ должно быть $y=3{,}0$.

М. К. Керимов

См. также: 9Б382, 9Б392, 9Б395, 9В80, 9В81, 9В91, 9В95, 9В101, 9В119, 9В123, 9В130, 9В141, 9В145—9В148, 9В150, 9В173

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

9 В325. Трехзначная система логики и ее применение к троичным цифровым схемам. Vacca R. A three valued system of logic and its applications to base three digital circuits. «Informat. processing». Paris — München — London, 1960, 407—413. Discuss., 413—414 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Описывается трехзначная функционально полная система логики, в которой выбор операторов основан на критерии максимальной простоты физических схем, используемых для выполнения нужных функций. Определяются операторы «и, или, обратные, противоположные, делящие пополам» и рассматриваются важные связи между наиболее полезными функциями. Дается таблица всех возможных логических трехзначных функций одного аргумента для этой особой системы и объясняется использование ее для создания функций двух аргументов.

Рассматриваются некоторые электронные схемы. Приводятся конструктивные особенности возможных троичных цифровых схем. Резюме автора

9 В326. Организация вычислительных машин и вычислимые функции. Pawlak Z. The organization of digital computers and computable functions. «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn.», 1960, 8, № 1, 41—51 (англ.; рез. русск.)

Работа математической машины в основном сводится к вычислению значений функций. В реферируемой статье рассматривается новый принцип организации машины для нахождения значений вычислимых функций. Под вычислимой (computable) функцией понимается функция, значение которой может быть определено для данного аргумента при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения и возвышения в степень. Указан ряд свойств таких функций. Функция выражается формулой, состоящей из символов: переменных, операторов, скобок. Компонента формулы Φ определяется так: а) сама формула есть тоже компонента; б) если αΔβ есть компонента формулы Φ, то и α, и β тоже являются компонентами (Δ означает любой оператор). Вычисление значения функции сводится к последовательному вычислению значения всех компонент формулы. Поэтому обращается внимание на адресование компонент, т. е., зная адрес переменной формулы Φ, требуется найти адрес всех компонент. Вводится порядок компоненты: самой формуле Φ присваивается порядок 1. Если компонента αΔβ имеет порядок i, то компоненты α и β имеют порядок $i+1$. Все компоненты формулы перенумеровываются по возрастанию их порядка. Эти номера составляют адрес компоненты, для определения которого вводятся адресные функции, которые позволяют по структуре формулы определить адреса всех компонент. Выдвигается идея безадресной организации машины. Память машины разбивается на участки, состоящие каждый из четырех ячеек. Первая и вторая заняты аргументами, в третьей записан символ операции, в четвертой номер участка. Машина снабжена арифмометром, реализующим любую из арифметических функций. Кроме того, в машине есть схема для вычисления значения адресной функции, которая определяет адрес результата в зависимости от номера участка. Машина начинает работу с участка с наибольшим номером и постепенно передвигается к участку с номером 1. На этом вычисление значения функции заканчивается. Команда машины состоит из символа операции и аргументов, над которыми выполняется операция. Такую организацию машины можно простым способом приспособить к автоматическому программированию. В применении к последовательным машинам этот принцип позволяет в несколько раз повысить скорость вычислений и полностью исключить время ожидания. При применении этого принципа в цифровой машине, созданной в Варшавском техническом университете, получена скорость работы 9000 операций в 1 сек. (по сравнению с 100 в настоящее время). При использовании автоматического программирования можно исключить схему вычисления адресной функции, адрес результата тогда должен быть введен в команду. С. А. Раскутин

9 В327. Алгебраическая переводящая программа. Kanner H. An algebraic translator. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, 2, № 10, 19—22 (англ.)

Описывается блок-схема алгоритма трехадресного программирования арифметических формул. Алгоритм представляет собой некоторое усовершенствование алгоритма программирования, описанного Уэгстейном (РЖМат, 1960, 3536). К этому усовершенствованию относятся: введение четырех уровней очередности выполнения арифметических действий (сначала вычисление одноместных функций, затем возведение в степень, затем умножение и деление, наконец, сложение и вычитание) и применение экономии рабочих ячеек. Кроме того, устранен ряд мелких неточностей. А. П. Ершов

9 В328. Организация программы для вычислительной машины S-2002. Kuzenko Werner. Eine Programmorganisation für die S-2002. «Elektron. Datenverarb.», 1959, № 4, 10—13 (нем.; рез. англ.)

Описывается организация программы, предназначенная для более рационального использования цифровой вычислительной машины S-2002. Повторное программирование решения тех или иных задач ускоряется при помощи библиотеки подпрограмм. Короткий буквенный код (максимум из двух букв) для изображения команды так же, как и использование цифр в качестве символов для адреса, значительно сокращают время записи и ввода. Приводится простой пример системы программ и подтверждение преимущества описанной организации программы. Резюме автора

9 В329. Некоторые особенности построения и программирования на цифровой вычислительной машине ГАММА-60. Dreyfus P. Programming design features of the GAMMA 60 computer. «Proc. East. Joint Comput. Conf., Philadelphia, Pa, 1958. NT-114». New York, 1959, 174—180. Discuss., 180—181 (англ.)

См. РЖМат, 1959, 9523, 10535; 1960, 960.

9 В330. Цифровой счетный автомат с программированием по математическим формулам. Kämmerer Wilhelm. Ziffern — Rechenautomat mit Programmierung nach mathematischem Formelbild. «Jenaer Jahrb». 1959. Teil 2. Jena, 1960, 396—440 (нем.)

Работа состоит из двух частей. В первой части рассматриваются общие проблемы программирования: взаимоотношение символа формулы и команд машины, собственные и относительные адреса, пути автоматизации программирования. Особое внимание автор уделяет модифицированному методу сопроводительных величин, предложенному Рутисхаузером. Во второй части работы обсуждается структура вычислительной машины, приспособленной для работы с вводом программы по методу сопроводительных величин. Алгоритм решения задачи вводится в машину в виде последовательности математических формул, включающих в себя четыре арифметических действия и элементарные алгебраические и трансцендентные функции. Арифметические операции сопоставляются в машине машинным операциям, а элементарные функции — соответствующим специальным подпрограммам, имеющимся в памяти машины. Особое внимание уделяется организации памяти с автоматизированным выбором нужных подпрограмм и констант. В качестве дальнейшего направления развития подобных машин рассматриваются основные требования к вычислительной машине, самостоятельно программирующей алгоритм решения задачи по методу компилирующей программы для библиотеки стандартных подпрограмм. Библ. 9 назв.

Д. А. Поспелов

9 В331. Дуплексные вычислительные машины МОБИДИК. Chao Stanley K., Rocheleau Gerard. Duplexing MOBIDIC computers. «Automat. Control», 1959, 11, № 6, 46—52 (англ.)

Выпускаемая фирмой «Сильвания» серия вычислительных машин МОБИДИК предназначена для применения в полевых условиях. Это — синхронные параллельные двоичные вычислительные машины, работающие с 38-разрядными числами с фиксированной запятой и знаком при тактовой частоте 1 *мгц*. Всего имеется 52 инструкции. Сложение и вычитание выполняются за 16 мксек., умножение может иметь от 1 до 7 запоминающих устройства на магнитных сердечниках емкостью 4096 чисел и временем обращения 8 мксек. Входные и выходные устройства включают магнитную ленту, магнитные диски, перфоленту, перфокарты и т. д. Машины полностью выполнены на полупроводниковых триодах. Модели *A*, *C* и *D* полностью идентичны по внутреннему устройству и отличаются лишь вспомогательным оборудованием. Для работы машин в масштабе истинного времени имеется система истинного времени. Типичными источниками информации являются радары, устройства определения погоды и т. д. Система истинного времени содержит 3 основных регистра: входной, адресный и выходной, причем последние два управляются программой машины. Когда

требуется выход системы истинного времени, то центральное устройство передает информацию в выходной регистр и возвращается к главной программе, а переданное число автоматически разбивается на группы и отсылается в нужной последовательности. Аналогично, если информация поступает в систему истинного времени, то посылается сигнал, прерывающий главную программу, и полученная информация передается в запоминающее устройство согласно адресу, записанному в адресном регистре, после чего автоматически изменяется адрес в адресном регистре. Благодаря этому осуществляется последовательная связь между вычислительными машинами и возможна эффективная дуплексная связь двух машин, решающих одну и ту же задачу и контролирующих друг друга. В отличие от моделей *A, C, D* модель МОБИДИК-В является дуплексной уже по своему внутреннему строению. Она имеет 2 центральных машины, управляемых общей тактовой системой. Система ввода и вывода, общая для обеих машин, состоит из двух преобразователей, блока восстановления данных, памяти объемом 50 000 000 двоичных знаков, двух систем истинного времени и комплекса входных и выходных устройств. Обе центральные машины аналогичны центральному устройству модели *A* и могут работать независимо. Системы истинного времени позволяют связывать центральные машины между собой и с другими машинами, либо непосредственно, либо через коммуникационные цепи. Одной из основных особенностей системы МОБИДИК-В является то, что одна центральная машина может давать инструкции, которые должна выполнять другая машина. Дуплексные возможности системы МОБИДИК-В очень гибки и подчиняются главной программе системы. Приведены логические схемы организации машин в различных системах работы, а также примеры решения научных проблем и работы в масштабе истинного времени. О. В. Бачин

9 В332. Проектирование систем совместно работающих вычислительных машин. Leiner A. L., Notz W. A., Smith J. L., Marimont R. B. Concurrently operating computer systems. «Informat. processing». Paris — München — London, 1960, 353—361 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Чтобы увеличить объем выполняемых работ, можно проектировать современные цифровые системы таким образом, чтобы они включали несколько одновременно работающих вычислительных машин. Такие группы машин могут быть использованы для совместной работы над большими по объему задачами, решение которых выходит за пределы возможностей какой-либо одной машины; вычислительные машины в системе могут быть специально приспособлены для выполнения отдельных разделов этих задач. Примером такой системы может служить система «Пайлот» (Pilot), которая в настоящее время собирается в национальном бюро стандартов и которая по графику должна поступить в эксплуатацию летом 1959 г. «Пайлот» состоит из трех вычислительных машин, которые связаны друг с другом таким образом, что все они могут работать одновременно над общей задачей. Для того чтобы такая многомашинная система, как «Пайлот», работала производительно, были необходимы удобные способы выражения меняющихся требований и команд, которые должны передаваться от одной машины к другой. В статье рассматриваются различные типы команд, используемых различными машинами для этих взаимных внутренних связей. Необходимы также автоматические устройства управления для регулирования работы различных устройств в системе и для предупреждения возможных «пробок». В статье рассматривается несколько методов, при помощи которых могут быть созданы такие устройства управления. Область «логики одновременной работы» является новым и важным аспектом логического проектирования, которая может стать столь же важной для будущего развития вычислительных машин, каким была «логика переключения» в прошлом. Резюме автора

9 В333. РВ-400 — новая «полиморфная» система обработки данных. Porter R. E. The RW—400—a new polymorphic data system. «Datamation», 1960, **6**, № 1, 8—14 (англ.)

Фирмой «Рамо — вулдридж» разработана «полиморфная» вычислительная система РВ-400, включающая в себя множество функционально независимых блоков, которые могут быть произвольно соединены между собой оптимальным образом при решении различных задач. При конструировании блоков основное внимание уделено на максимальную гибкость системы в решении широкого класса различных задач. Основой системы РВ-400 является центральное управление (ц. у.), связывающее между собой блоки вычислений (б. в.), буферные блоки (б. б.), блоки магнитной ленты, блоки магнитного барабана, периферийные буферные блоки и блоки наблюдения. Ц. у. связывает между собой пары блоков, а так как внутренним программированием обладают лишь б. в. и б. б., то в каждой паре должен быть хотя бы один такой блок. Каждый б. в. представляет собой универсальную двухадресную, параллельную вычислительную машину, работающую с фиксированной запятой. Ее внутреннее запоминающее устройство на ферритовых сердечниках имеет емкость 1024 28-разрядных числа. Из 39 команд, возможных для б. в., 24 являются арифметическими, 10 — командами управления программой, 5 — внешними командами. Двадцатью одной командой обеспечивается выполнение 7 арифметических операций: сложение, вычитание, абсолютное вычитание, умножение, деление, извлечение квадратного корня и исправление 3 методами: замещением, сохранением и запоминанием. Остальные 3 команды дают сложение с накоплением, умножение с накоплением и передачу. Команды управления включают запоминание, запоминание в двойном аккумуляторе, заполнение аккумулятора, введение маски в *S* регистр, останов, переход связи, переход к сравнению, переход к опознаванию, переход контроля и сдвиг. Внешние команды включают вывод команд, ввод данных, условный ввод данных, вывод данных и передача чисел. Двухадресное сложение и вычитание производятся за 35 мксек., умножение за 90 мксек., деление за 130 мксек., извлечение квадратного корня за 170 мксек. Буферный блок состоит из 2 подблоков, каждый из которых имеет запоминающее устройство (з. у.) на ферритовых сердечниках емкостью 1024 числа, и внутренние регистры, используемые при автономной работе. Б. б. служит для связи б. в. с другими блоками, для уменьшения времени передачи данных, причем б. в. может использовать з. у. б. б. для расширения собственного з. у. Б. б. может определять и выполнять определенные команды, записанные в его з. у. О. В. Бачин

9 В334. Предварительный опыт работы с электронной системой для обработки информации. Hickman T. C. Early experiences with an E. D. P. system. «Comput. J.», 1960, **2**, № 4, 152—163 (англ.)

Подробно излагается процесс подготовки компании «Unilever Ltd» к установке и эксплуатации цифровой вычислительной машины «Эллиотт-805» (Elliott 805). Компания занята производством и торговлей различными продуктами (маргарин, мороженое, консервы и т. д.), имеет большой объем и номенклатуру товарооборота. Заказ на изготовление машины сдан в августе 1956 г. после тщательного изучения экономического эффекта ее применения для составления платежных ведомостей. Машина изготовлена в ноябре 1957 г. Тип машины последовательный, система счисления двоичная, частота следования импульсов 333 *кгц*, длина кода 31 цифра и знак, длительность кода 102 мксек., система команд одноадресная. В одном коде размещаются две 16-разрядные команды. Емкость запоминающего устройства на магнитных дисках 16384 кода, число дорожек на диске 64, чис-

ло оборотов дисков 2300 оборотов в 1 мин. Максимальное время выборки группы из 64 кодов 45,2 мсек., среднее время выборки группы 34 мсек. Емкость памяти на магнитных лентах 300 000 кодов на одной бобине с лентой длиной 300 *м*. Скорость движения ленты 760 *мм/сек*, время считывания группы из 64 кодов 170 мсек., время старта 30 мсек., время реверсирования 60 мсек., дистанция останова ~25 *мм*. Емкость оперативной памяти 512 кодов, максимальное время выборки 1,6 мсек., среднее 0,8 мсек.; к трем кодам обеспечен прямой доступ. Время сложения и вычитания (включая команду) 306 мксек., время умножения и деления 3,3 мсек. Скорость ввода на 5-канальной бумажной ленте 150 знаков в 1 сек.; скорость вывода на бумажную ленту 25 знаков в 1 сек.; скорость записи на магнитную ленту 300 знаков в 1 сек. (760 *мм/сек*); скорость электромеханического печатающего устройства 18 знаков в 1 сек. Для технического обслуживания системы создана группа из трех инженеров, прошедших стажировку при изготовлении и наладке машины. Группа программирования в 1957 г. насчитывала 10 человек, из них 5 — с математическим образованием, остальные с коммерческими знаниями и опытом работы в отделах фирмы. В период между заказом и получением машины прочитаны четыре однонедельных курса для ведущих работников компании. Число слушателей — до 20 человек на каждом курсе. Направление курса — объяснение свойств машины, основ программирования, подготовительной работы. Проведены первоначальные исследования по применению системы в трех направлениях: составлению платежных ведомостей на зарплату служащих фирмы (1800 человек), обработке показателей торговли и финансовых отчетов подразделений фирмы, решению методом линейного программирования задачи нахождения наиболее экономичной смеси сырьевых материалов для изготовления комбикормов определенного качества для скота. Приводятся сведения об объемах задач. Ставятся для решения задачи экономического и коммерческого характера: 1) Анализ вариантов закупки скота и размещения мяса; анализ способов закупки, переработки и размещения жиров и масел для мыловаренных производств. Задача сводится к решению системы уравнений с числом уравнений и числом действительных переменных до 250; число ненулевых элементов в матрице может в процессе решения увеличиваться от 5—10% до 40% и более. 2) Изучение объема и особенностей рынка; задача включает анализ возрастных групп, социального состава и других особенностей населения изучаемых районов вместе с подробным списком периодических печатных изданий, распространяемых в районе. 3) Расширение и совершенствование методов краткосрочных прогнозов спроса и анализ данных торговли. 4) Задача определения уровней фондов товаров, закупаемых в тропиках, и степени риска выхода за эти уровни. Одна из разрабатываемых для решения этой задачи программ использует метод проб (Монте-Карло). Е. Ф. Бережной

9 В335. Проверка специализированной системы для обработки данных, содержащей имитаторы и оборудование для этой проверки. Strassman A. J., Kurkjian L. H. System evaluation and instrumentation of a special-purpose data processing system using simulation equipment. «Proc. East. Joint Comput. Conf., Philadelphia, Pa, 1958. NT-114. New York», 1959, 127—130. Discuss., 130 (англ.)

Описываются принятые фирмой Hughes Aircraft принципы проверки сложных вычислительных систем в производстве и применяемое для этих целей оборудование. В качестве примера рассмотрена проверка специализированной вычислительной системы для обработки радиолокационных данных, содержащей 1500 радиоламп, 2500 транзисторов, 40000 логических ключевых диодов и 3500 триггеров, в каждом из которых содержится по 4 транзистора. Проверка производится последовательно по этапам производства. Сначала проверяются в динамике все элементы (триггеры, логические повторители, формирователи, блоки диодов, регенераторы импульсов и т. п.). Для проверки элементов имеются специально разработанные проверочные устройства, например триггеры проверяются в установке, в которой они включаются в схему счетчика по модулю 2. Проверенные элементы собираются в блоки, содержащие до 21 элемента, и проверяются на «тестере блоков», который обеспечивает подачу комбинаций статических и динамических сигналов через наборное поле. Для проведения проверок на этом этапе требуется наибольшее количество моделирующего оборудования, сравнительно с другими этапами. В состав моделирующего оборудования входят соответствующие переключатели, функциональные генераторы, источники синхронизирующих сигналов. Проверка производится в динамике, причем программа ее и оборудование разрабатываются специалистами, разрабатывавшими данную группу блоков. После соединения группы блоков в субсистему также производится ее проверка с использованием имитационного оборудования. Система в целом проверяется окончательно, причем при этой проверке используются устройства для самопроверки, встроенные в состав системы. Считается, что такая проверка по этапам производства с применением специально разработанной аппаратуры более быстра и эффективна, чем проверка с помощью универсальных проверочных устройств. В ответах на вопросы установлено, что все проверки производятся не автоматизированно, так как аппаратура разрабатывалась для проверки опытного образца и по экономическим соображениям автоматизация проверок оказалась нецелесообразной. В составе аппаратуры системы имеется имитатор радиолокационных целей, обеспечивающий возможность проведения проверок системы без сопряжения с радиолокационными станциями.

И. Д. Алимов

9 В336. Коллоквиум по электронной переработке данных. Gesdorf. Wissenschaftliches Kolloquium über elektronische Datenveraritung. «Technik», 1960, **15**, № 9, 584—585 (нем.)

Сообщение о коллоквиуме, созванном заводом электронных вычислительных машин VEB Electronische Rechenmaschinen (Karl — Marx — Stadt, ГДР) в апреле 1960 г. Обсуждались вопросы применения машин для целей управления. Демонстрировались электронные вычислительные машины Robotron R 12 и Robotron ASM 18. Приводится тематика докладов коллоквиума.

И. Б. Рохлина

9 В337. Электронная считывающая машина. Wada H., Takahashi S., Iijima T., Okumura Y., Imoto K. An electronic reading machine. «Informat. processing.» Paris — München — London, 1960, 227—231. Discuss., 231—232 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Система этой машины подобна машине Solatron ERA с диодной матрицей. Она опознает 72 отпечатанные на пишущей машинке буквы (включая строчные и прописные), цифры и другие знаки. Каждая буква накладывается на растр, состоящий из mn ячеек, и результат сопоставляется с матрицей опознавания. Поскольку из-за различных дефектов (пробелы, смещение) некоторые ячейки для одной и той же буквы могут становиться черными в одном случае и белыми — в другом, вводится промежуточное понятие серой ячейки. В процессе опознавания эти ячейки не используются. Вдоль центральной оси линий буквы на расстояниях a_1 и $a_2 (a_1 < a_2)$ проводятся как бы две линии. Участок от линии букв до a_1 рассматривается как черный, за линией a_2 — как белый, а промежуток между a_1 и a_2 — как серый. Участок, охватываемый a_1, считается черным, если черный цвет преобладает в нем более чем в k раз, и белым, если белый цвет преобладает в нем более чем в $1—k$ раз; во всех остальных случаях он считается серым. Это проделывается для каждой буквы. Чтобы

система была менее чувствительной к помехам, по возможности большее число ячеек превращаются в серые, что совсем не мешает машине отличать буквы друг от друга. Найдены оптимальные значения m, n, k, a_1 и a_2 и доказано, что 110 из 120 ячеек в букве могут быть сделаны серыми. В настоящее время машина, использующая эту опознавательную матрицу, находится в эксплуатации. Резюме автора

9 В338. Квазитопологический метод распознавания линейных образов. Sherman H. A quasi-topological method for the recognition of line patterns. «Informat. processing». Paris — München — London, 1960, 232—238. Discuss., 238 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Предложен автоматический метод для опознавания линейных образов. В настоящее время он применяется для опознавания печатных букв и цифр, написанных от руки. Буква вводится в вычислительную машину в виде матрицы, описывающей развертку буквы по элементам. Обработка фигуры идет в направлении отыскания узлов, которые являются либо точками соединения частей фигуры, либо ее концами. Для описания графа, связывающего эти узлы, используется матрица связи. Элементы матрицы связи описывают знак, максимальное значение и величину кривизны ветвей, сходящихся в узлах. В дальнейшем, при установлении взаимного положения узлов, эта матрица связи может использоваться для отождествления поэлементной развертки знака с эталонной матрицей. Если расположение узлов отличается от эталона, используется матрица транспозиции для переразмещения узлов. Если вводимые фигуры имеют ощутимую толщину линий, используется программа «утоньчения». Задача программировалась для машины «Вихрь-1». Резюме автора

9 В339. Цифровая вычислительная машина приспосабливается для решения пространственных задач. Unger S. H. A computer oriented toward spatial problems. «Proc. West. Joint. Comput. Conf., Los Angeles, Calif.», 1958, № T-107. New York, 1959, 234—239 (англ.)

Цифровые вычислительные машины, получившие широкое распространение в последнее десятилетие, во много раз ускоряют процессы решения различных задач. Имеется, однако, класс задач, которые не могут быть решены существующими цифровыми машинами — так называемые пространственные задачи (распознавание букв и символов и т. п.). Трудность при решении этих задач состоит в том, что современные машины могут хорошо справляться лишь с небольшим количеством информации в каждый данный момент времени. Очевидно, что эффективное решение задач пространственного типа не может быть проведено без какой-либо формы параллельной работы. Таким образом, необходимы более сложные машины, нежели те, которые существуют в данный момент. Общая структурная схема подобной машины должна включать в себя главную систему управления и прямоугольное множество логических блоков-модулей. Каждый модуль связан с четырьмя соседними модулями и получает команды от главной системы управления, которая подает общие команды одновременно ко всем модулям. Каждый модуль состоит из одноразрядного аккумулятора, небольшого запоминающего устройства с произвольной выборкой и связанными с этими цепями логическими схемами. Главная система управления включает в себя запоминающее устройство с произвольной выборкой для хранения инструкций, синхронизацию и дешифрирующие схемы. Логический сумматор совместно с выходом аккумулятора каждого модуля передает к главной системе управления информацию о том, что все аккумуляторы хранят нули и таким образом разрешается передача нулевой команды. Информация может быть передана из одного модуля в другой посредством инструкции сдвига вправо, влево, вверх, вниз. Аккумуляторы модулей образуют множество ячеек. В зависимости от содержания ячеек будет иметь место множество единиц или множество нулей или смешанное множество. Для заполнения множества информацией служит команда кругового сдвига, с помощью которой информация от внешнего источника передается в аккумулятор самого нижнего левого модуля. В тот же самый момент содержимое каждой ячейки передается в следующую справа ячейку, исключая правую ячейку каждого ряда, который посылает свое содержание в левую ячейку вышележащего ряда. Модуль, лежащий в верхнем правом углу, передает свое содержимое в выходной регистр. Таким образом новое множество может быть передано в матрицу модулей, в то время как старое содержание одновременно может быть считано. При некоторых операциях обработки знаковой информации можно получить выход непосредственно с главной системой управления. Каждый модуль связан с главной системой управления пятью шинами, каждая из которых соответствует своей команде: сложить, умножить, сложить в памяти, умножить в памяти и взять инверсию. Остальные инструкции являются комбинациями этих пяти инструкций. Квадратное построение матрицы не является обязательным. Возможно также использование трехмерных матриц. Рассмотренная машина была промоделирована на машине ИБМ-704. Г. Х. Новик

9 В340. О машинном распознавании речи. Hughes G. W., Halle M. On the recognition of speech by machine. «Informat. processing». Paris — München — London, 1960, 252—256 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Рассматриваются проблемы, возникающие при конструировании прибора, способного различать предложения, которые нормально различаются в естественном разговорном общении. Приводятся параллели между этими проблемами и проблемами химического анализа. В обоих случаях совокупность идентифицируемых явлений принципиально неограничена. Анализируемые явления рассматриваются как комплексы фундаментальных составляющих единиц, принадлежащих к ограниченному классу: элементов и субатомных частиц в химическом анализе, фонем и дифференциальных признаков в лингвистическом анализе. Хотя и совершенно закономерное, отношение между физическими свойствами идентифицируемых явлений и составляющих их единиц не должно быть непосредственным. Аналитические процедуры, таким образом, не могут быть основаны исключительно на прямом распознавании свойств фундаментальных единиц и должны использовать до некоторой степени косвенные методы вывода. Рассматриваются специальные проблемы, возникающие в этой связи. Отмечается также, что приборы, способные распознавать только часть дифференциальных признаков, могут быть использованы практически, если возможно предсказать, какие из «разных» предложений языка не будут различаться прибором, благодаря его неполности. Программы для распознавания речи, основанные на предыдущих соображениях, были выработаны и приведены в действие на электронной вычислительной машине. Дается описание некоторых из выработанных программ. Резюме автора

9 В341. Новый метод установления грамматических правил для языков, имеющих фразеологическую структуру. Solomonoff R. A new method for discovering the grammars of phrase structure languages. «Informat. processing». Paris — München — London, 1960, 285—290. Discuss., 290 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

В языках с конечным числом состояний, любое предложение, составляющее «цикл», можно с успехом повторять любое число раз; при этом фраза остается приемлемой, т. к. внесение этого предложения не меняет состояния, существующего на данном отрезке. В языках с фразеологической структурой, единицей, составляющей «цикл», является пара предложений, расположенная в определенном порядке. Если первое предложение, входящее в состав такой пары, поставить перед оди-

ночным предложением соответствующей категории, а второе предложение из пары поставить после такого одиночного предложения, то вся фраза останется приемлемой. Такого рода вставки могут повторяться любое число раз, т. к. эта операция не меняет типа, к которому относится данная фраза. Множество, состоящее из таких циклов и циклов высшего порядка, существующих в языках с фразеологической структурой, а также правила внесения вышеуказанных предложений во фразу, позволяют дать полное грамматическое описание языка. Резюме автора

9 В342. Перевод с помощью языка символов. Gluesing Eugene C. Symbolic language translation. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif, 1959». New York, 1959, 288—291 (англ.)

В вводной части статьи указывается, что она опирается на идеи, впервые высказанные Нагелем (Nagel E., Symbolic logic, haddock's eyes and the walking dog ordinance, The World of Mathematics, Simon and Schuster, New York, 1956, pp. 1878—1900), и на определение понятия перевода с одного языка на другой, принимаемое Риченсом и Бутом (Locke W. N., Booth A. D., ed., Machine Translation of Languages, M. I. T. Press and John Wiley and Sons, New York, N. Y., 1955). Согласно этому определению, перевод представляет собой замену одного языка другим для выражения того же самого набора значений. Обсуждаются основные проблемы машинного перевода в этом смысле, который предлагается осуществлять с помощью языка-посредника. Язык должен быть языком символов, принятых в символической логике, с привлечением некоторого дополнительного количества символов, необходимого для обозначения специфических грамматических категорий. Задача машинного перевода сводится к переводу значения с реального языка на символический язык и с символического языка на реальный. В статье приводятся примеры перевода фраз с английского языка на немецкий через посредство символического языка. Указывается, что возможны два подхода к построению языка-посредника: 1) использовать большое количество символов для обозначения слов и фраз; 2) употреблять минимальное число символов, используя их комбинации и дополнительные знаки для обозначения отношений между выражаемыми понятиями. Второй подход считается автором более плодотворным. В заключение указывается, что переводы текстов, которые могут быть получены с помощью подобного языка-посредника, будут только правильно передавать содержание, но, с точки зрения стиля, могут быть неудачными. Библ. 9 назв. Т. Н. Молошная

9 В343. О соответствии, вероятностной каталогизации и получении информации. Maron M. E., Kuhns J. L. On relevance, probabilistic indexing and information retrieval. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, 7, № 3, 216—244 (англ.)

Статья сообщает о новом методе каталогизации литературы и ее поиска в механизированной системе библиотеки. В качестве основного понятия берется «соответствие» документов, которое трактуется в терминах теории вероятностей. Метод «вероятностной каталогизации» позволяет с помощью вычислительной машины делать статистические выводы и получать «индекс соответствия» для каждого документа. Последний есть вероятностная мера того, что документ удовлетворяет предъявленному требованию. Наконец, автор предлагает трактовать проблему каталогизации как задачу статистического вывода о документе на основе предъявленного требования с целью получения списка документов, упорядоченных по величине их «соответствия» требованию. По резюме автора

9 В344. Вычислительная математика при электронных математических автоматах. Sauer R. Numerische Mathematik beim Einsatz von Rechenautomaten. «Bul. Inst. politehn. Jași», 1959, 5, № 3-4, 65—68 (нем.; рез. русск., рум.)

Автор попутно с изложением некоторых замечаний, касающихся автоматического программирования и алгорифмического языка АЛГОЛ, отмечает ряд задач вычислительной математики, представляющих интерес для электронных математических автоматов, и в особенности роль устойчивых численных методов. Резюме автора

9 В345. Симпозиум по логической организации сверхбыстродействующих вычислительных машин. Metropolis N. C. Symposium on the logical organization of very high speed computers. Informat. processing. Paris—München—London, 1960, 432—435 (англ.)

Приводятся сообщения симпозиума по логической организации сверхбыстродействующих вычислительных машин. Указывается, что значительное повышение быстродействия может быть достигнуто как путем широкого совмещения операций в машине, вплоть до одновременного выполнения разных программ или частей программы, так и разделением основных устройств машины на отдельные независимые устройства (введение нескольких независимых запоминающих устройств и т. д.). Большое внимание следует уделять таким логическим операциям, как просмотр массива информации, опознавание объектов, проверка данных и т. д. Выражается мнение, что при создании машин с чрезвычайно большим объемом памяти могут быть имитированы на машине некоторые функции человеческого мозга: ассоциации, обучение, получение новых идей. Сообщается о создании в Манчестерском университете новой сверхбыстродействующей транзисторной вычислительной машины MUSE, на основе разработки которой будет строиться машина АТЛАС. Элементарная операция сложения выполняется этой машиной за 200 мксек. Машина имеет набор из 300 различных команд, причем 180 команд дают систему программирования «Экстракод». Команды экстракода автоматически дают обращение к подпрограммам, а затем возвращают управление к основной программе. Машина имеет память на магнитных сердечниках емкостью 8 000 слов и временем выборки 0,5 мксек и на барабане (емкость 92 000 слов). Предполагается, что скорость работы машины составит около 700 000 операций в 1 сек. Указывается, что скорость работы имеющихся в настоящее время запоминающих устройств отстает от быстродействия современных арифметических устройств. Предлагаются два метода преодоления этого несоответствия: использование добавочной сверхбыстродействующей памяти и одновременная работа памяти и арифметического устройства; в последнем случае предполагается использование нескольких регистров для кратковременного хранения данных, команд и промежуточных результатов. Эти методы использованы в новой вычислительной машине, построенной в университете Иллинойса. Приводится также описание германской вычислительной машины TR-4 и американских машин LARC и «Stretch». Машина TR-4 построена на транзисторах и выполняет сложение с фиксированной запятой за 4,5 мксек, умножение за 30 мксек (время обращения к памяти не учитывается). Имеется 3 независимых запоминающих устройства на ферритовых сердечниках с циклом обращения 6 мксек. Одно из них используется для команд, второе для данных и третье для индексрегистров. Данные могут поступать одновременно с четырех магнитных лент со скоростью 37 500 знаков в 1 сек. Машина LARC имеет два вычислительных устройства, выполняющих сложение за 4 мксек, умножение за 8 мксек, деление за 28 мксек, причем время операций приблизительно одинаково при работе с фиксированной и плавающей запятой. Широко используется совмещение операций. Запоминающее устройство машины состоит из памяти на ферритовых сердечниках емкостью 99 500 12-разрядных десятичных слов и маг-

нитных барабанов со скоростью передачи данных 360 000 знаков в 1 сек. Устройство для обработки входной-выходной информации представляет собой небольшую вычислительную машину, способную выполнять ряд логических операций, а также операцию сложения. Данные могут быть выданы с машины в виде графиков и таблиц. Машина «Stretch» выполняет сложение с плавающей запятой за 1 мксек, умножение за 2 мксек, деление за 8 мксек. Оперативная память машины состоит из нескольких устройств на ферритовых сердечниках емкостью по 16 тыс. слов и временем обращения 2,2 мксек. Внешнее запоминающее устройство состоит из одного или нескольких магнитных дисков емкостью по 4 млн. слов и скоростью обмена информации с внутренней памятью 250 000 тыс. слов в 1 сек., причем обмен информацией и вычисления могут совмещаться. Центральное вычислительное устройство состоит из быстродействующего арифметического устройства и небольшого устройства для выполнения логических операций; оно имеет собственную быстродействующую память на 16 чисел. В машине предусмотрено изменение нормального хода программы, если выполняется одно из 50 условий; в этом случае машина пользуется командами и данными, хранящимися в особой таблице.

С. А. Раскутин

9 В346. Совмещение по времени в больших быстродействующих вычислительных машинах. Strachey C. Time sharing in large fast computers. «Informat. processing». Paris—München—London, 1960, 336—341. Discuss., 341 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

При частых простоях центрального вычислительного устройства большой вычислительной машины, например, при обмене информацией с относительно медленными внешними устройствами, ее преимущество в быстродействии может быть потеряно. Использование буферных запоминающих устройств невыгодно ввиду их сложности и большой стоимости. В целях сокращения потерь времени предлагается широко использовать совмещение операций в вычислительной машине. При обмене информацией с магнитной лентой предлагается использовать следующую схему. В машине имеются два дополнительных регистра. В первом из них из поступающих с ленты букв составляется слово. В это время центральное вычислительное устройство продолжает выполнение основной программы. После того, как слово получено полностью, оно передается на второй регистр, а основная программа прерывается. Принятое слово проверяется и складывается с контрольной суммой, а затем отправляется в нужное место оперативной памяти. Затем продолжается выполнение основной программы. Однако при одновременной работе с несколькими внешними устройствами могут придти сразу несколько сигналов прерывания основной программы, что может привести к ошибке. Поэтому предлагается сигналы от внешних устройств разделить на несколько групп и установить порядок работы групп. Если выполняется команда более низкой группы, то она прерывается немедленно, а если более высокой или той же группы, то сигнал прерывания ждет освобождения машины. К наиболее низкой группе относится основная программа. К высшим группам относятся сигналы наиболее инерциальных внешних устройств. Указывается, что система, реализующая такую схему, была бы чрезвычайно сложной в действии. Поэтому предлагается выполнять все эти операции при помощи специальной программы, называемой Директором, которая хранится в постоянной памяти машины. Применение Директора дает возможность не только работать одновременно с несколькими внешними устройствами без существенных потерь времени центрального вычислительного устройства, но и снизить потери машинного времени на отладку новых программ, при этом во время перерывов выполняется какая-либо другая программа. С. А. Раскутин

9 В347. Принцип подвижных блокировок при построении схем электронных цифровых машин. Карцев М. А. «Докл. АН СССР», 1960, **135**, № 5, 1064—1067

Рассматриваются вопросы построения цифровых схем, называемых автором схемами с подвижными блокировками. Характерная для таких схем в некотором смысле плавающая логика работы создается введением избыточных управляющих входов и установлением обратных связей. Приводятся две схемы такого типа, которые могут быть использованы в цифровых электронных машинах, построенные из элементов типа НЕ и И—ИЛИ—И—ИЛИ (последний имеет до 4—6 входов на каждой ступени). Приводятся характеристики элементов, разработанных при участии автора: частота переключения 5—7 *мгц*, задержка в цепочке И—ИЛИ—И—ИЛИ—НЕ порядка 20—30 нсек. Отмечается, что принцип подвижных блокировок может найти применение при построении самообучающихся автоматов.

М. И. Нечепуренко

9 В348. О вычислительной машине, которая понимает математический язык. Kalmár László. Über einen Rechenautomaten, der eine mathematische Sprache versteht. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, 40, Sonderh., 64—66 (нем.)

Кратко описываются возможные практические формы организации вычислительной машины, программируемой на языке математических формул, о теоретических основах работы которой автор докладывал на Варшавском симпозиуме в сентябре 1959 г. В. И. Смирнов

9 В349. Запоминание информации в магнитной памяти, работающей на высокой частоте с фазовым сдвигом. Völcker Ehrhard. Informationsspeicherung in magnetischen Gedächtnissen mit phasenverschobenen Hochfrequenzen. 1. Teil. «Elektronik», 1960, **9**, № 9, 275—279 (нем.)

Первая часть работы, посвященной построению матричной магнитной памяти с координатным способом выборки, основанном на смещении фаз выборки по строкам и столбцам. Подробно рассматриваются физические процессы, происходящие при перемагничивании сердечника на частотах порядка 1 *мгц*. Обсуждается блок-схема подобного устройства. Д. А. Поспелов

9 В350. Дискуссия по статье Морриса и Александера «Введение в троичную систему счисления». Steel R. Discussion on the paper: «An introduction to the ternary code number system» by D. J. Morris and W. Alexander.—Authors'reply. «Electron. Engng», 1960, **32**, № 394, 780 (англ.)

Приводится отклик на статью Морриса и Александера «Введение в троичную систему счисления» (РЖМат, 1961, 6В261). Подвергается сомнению содержащееся в статье утверждение о том, что информация и количество оборудования, необходимые для записи этой информации, выражаются формулами $N=R^n$, $E=nR$, где R есть основание системы счисления. В частности указывается, что в некоторых случаях количество оборудования может выражаться формулой $E=n+R$. Хотя признается, что троичная система в некотором отношении представляется более выгодной, чем двоичная, выражается мнение, что следует иметь более строгое доказательство этого положения. Приводится ответ Морриса и Александера, которые разъясняют, что под количеством оборудования следует понимать количество ламп или транзисторов, имеющихся в данной схеме. Число состояний ламповой или транзисторной схемы равно числу этих элементов в схеме. В этих условиях формула $E=nR$ сохраняет силу. Однако имеются элементы, например, декатроны, позволяющие создать на одном элементе схему с несколькими устойчивыми состояниями. В таких случаях следует для E пользоваться другими формулами. Предлагаемая в статье Стила формула $E=n+R$ может быть справедлива только в некоторых частных применениях. С. А. Раскутин

9 В351. О схемах одноразрядного сумматора. Вайнштейн М. Я. «Докл. АН СССР», 1960, **135**, № 5, 1031—1034

Рассмотрены вопросы оптимального в смысле количества диодов построения схем трехвходового комбинационного двоичного сумматора (*b*, *c*, *e* — входы; *B* — сумма, *E* — перенос). Задача решена для класса схем, построенных из элементов И($\wedge$),ИЛИ ($\vee$) и НЕ (θ). Предполагается, что элемент θ используется не более одного раза, и схема не содержит обратных связей. Приводятся все оптимальные (с точностью до перестановок входов и двойственных переходов) варианты схем такого типа для всех допустимых наборов входных величин *b*, *c*, *e*, *b'*, *c'*, *e'*. Показано, что оптимальные схемы содержат не менее 16 диодов.

М. И. Нечепуренко

9 В352. Замечание о схеме одновременного переноса в скоростных сумматорах. Lehman M., Burla N. A note on the simultaneous—carry—generation system for high—speed adders. «IRE Trans. Electronic Comput.», 1960, **9**, № 4, 510 (англ.)

Обсуждается предложенная Вайнбергером и Смитом схема сумматора с одновременным переносом. Характерным для этой схемы является то, что перенос из *k*-го разряда появляется на один — два часовых интервала раньше образования суммы, т. е. для того, чтобы эти переносы появились в нужный момент времени, требуется дополнительное оборудование. Поэтому авторы считают, что такая схема является менее эффективной, чем улучшенный вариант схемы «ожидаемого переноса», который авторы предполагают описать позже.

С. А. Раскутин

9 В353. Двоичное умножение в цифровых машинах. Green Abraham. Binary multiplication in digital computers. «Proc. I.R.E.», 1959, **47**, № 6, 1159—1160 (англ.)

Рассмотрены вопросы построения схемы двоичного умножения в цифровых вычислительных машинах, в основе которой лежит обычная матричная схема, развертывающая в пространстве сдвинутые множимые в соответствии с цифрами множителя. М. И. Нечепуренко

9 В354. Статистический анализ некоторых алгоритмов двоичного деления. Freiman C. V. Statistical analysis of certain binary division algorithms. «Proc. IRE», 1961, **49**, № 1, 91—103 (англ.)

Рассматривается вопрос об оценке среднего числа цифр частного, получаемых за одну итерацию при использовании различных алгоритмов деления. Для решения этой задачи необходимо знать распределение делимого и последовательных остатков. В работе строится марковская цепь, стационарное распределение которой принимается за распределение делимого и всех остатков. Если число итераций велико, то полученные результаты хорошо согласуются с опытом. В. Н. Тутубалин

9 В355. Логическая машина для автоматического построения эквивалентной релейной сети. Madarász B. Logical machine for automaticaly setting up an equivalent relay network. «Acta techn. Acad. scient. hung.», 1961, **32**, № 1-2, 3—10 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Описана логическая машина, способная автоматически строить эквивалент для неизвестной релейной сети *D*, под которой понимается логическое устройство, дающее на выходе сигналы 0 или 1 в зависимости от комбинации входных сигналов. Предлагаемая машина для этой сети строит эквивалентную сеть D+, т. е. такую сеть, которая для любого набора входных сигналов дает тот же выход, что и сеть *D*. Так как каждую логическую формулу можно записать в полной конъюнктивной нормальной форме, то машина и подбирает такую схему соединений, которая реализует конъюнктивную нормальную форму, эквивалентную логической формуле сети *D*. Для этого в машине имеется релейное устройство, состоящее из трехпозиционных реле (приводится схема этого устройства). Состояния этих реле определяются вариатором 2, который создает схему соединений, соответствующую какой-либо конъюнктивной нормальной форме. Получив команду из устройства управления, вариатор 2 создает первую из таких схем. После этого вариатор 1 начинает выдавать один за другим всевозможные наборы входных сигналов как на вход испытываемой сети *D*, так и на вход полученной схемы. Выходные сигналы сравниваются в специальном устройстве, и если они совпадают, то вариатор 1 дает следующий набор входных сигналов, а если не совпадают, то вариатор 2 строит схему, соответствующую другой конъюнктивной нормальной форме. После этого весь процесс повторяется, пока схема на любую возможную комбинацию входных сигналов не будет отвечать так же, как и испытываемая сеть *D*. Эта схема и будет эквивалентной сетью D^+. Применение этой машины позволит не только исследовать неизвестные сети, но и получать более простые формы одной и той же сети. Выражается надежда, что эта машина представляет собой шаг к созданию автоматических кибернетических схем, способных организовывать и перестраивать самих себя.

С. А. Раскутин

9 В356. Цифровые вычислительные машины.—. Las computadoras digitales. «Energía industr.», 1960, **3**, № 9, 58—61 (исп.)

Популярная статья, описывающая общие принципы построения цифровых вычислительных машин и применение их для выполнения различных коммерческих работ. Приводится таблица, сравнивающая скорость работы и стоимость производства вычислений для различных классов вычислительных машин. На основании более 2000 ответов на анкету, распространенную среди фирм, эксплуатирующих вычислительные машины, составлена статистическая таблица, освещающая использование вычислительных машин для производства различных коммерческих и производственных операций.

О. В. Бачин

9 В357. Электронная вычислительная машина ER-56. Basten R., Dreyer H. J. Den elektroniske regnemaskine ER 56. «Ingr. og bygningsvaesen», 1960, **55**, № 19, 379—384 (датск.)

Приводится описание вычислительной машины ER-56, предназначенной для коммерческих, производственно-экономических и других подобных расчетов. Машина ER-56 работает в двоично-десятичной системе счисления как с фиксированной, так и с плавающей запятой. Короткие числовые ячейки соответствуют 6 десятичным разрядам, длинные ячейки 13 десятичным разрядам. Кроме того, имеется знаковый разряд. В случае полулогарифмической формы представления порядок числа меняется от —49 до +49, а для записи мантиссы используется 11 цифр. Командная ячейка состоит из 4 цифр для адреса, одной цифры для индекса и двух цифр для кода операции. Скорость работы в мсек арифметического устройства определяется следующей табличкой:

Операция	Фиксированная запятая		Плавающая запятая
	короткие ячейки	длинные ячейки	
Сложение — вычитание	0,20	0,30	0,96—1,10
Умножение	0,32—0,67	0,62—2,30	0,82—2,26
Деление	2,96	9,75	7,98

Оперативное запоминающее устройство состоит из памяти на ферритовых сердечниках емкостью в 9000 коротких числовых ячеек. Внешнее запоминающее устройство включает в себя магнитный барабан, на котором

размещается 12 000 коротких ячеек и магнитные ленты. Во внешнем запоминающем устройстве вся информация хранится в двоично-пятеричном коде, что позволяет осуществлять контроль однократной ошибки при записи и считывании информации. Библ. 6 назв. Д. А. Поспелов

9 В358. Вычислитель ДЕ-60 фирмы «Клэри».— DE—60—Rechner von Clary.— «Bürotechn. + Automat.», 1960, **1**, № 6, 179 (нем.)

Краткое сообщение о выпуске фирмой «Клэри» настольного малого вычислительного устройства ДЕ-60 на транзисторах, которое характеризуется как самая простейшая и самая дешевая (стоимость 18 тыс. долл.) универсальная цифровая машина, которая когда-либо была выпущена. Производительность сравнивается с 20 настольными счетными машинами. И. К. Хайлов

9 В359. Бинарная вычислительная машина. Harrower A. Ross, Doyen John T. A binary computer. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, **2**, № 12, 33—35 (англ.)

Описывается небольшое вычислительное устройство, предназначенное для обучения теории вычислительных машин, операциям с числами в двоичной системе и применению вычислительных машин в физике. Устройство имеет входы для двух четырехразрядных двоичных чисел и тривиальные системы на механических реле, обеспечивающие сложение этих чисел, реверс и определение знака. Ш. И. Барилко

9 В360. Полуавтоматические системы. Ч. IV.—. Self—contained systems. SURVEY. Part IV. «Automat. Data Process.», 1961, **3**, № 1, 34—38 (англ.)

Описываются некоторые полуавтоматические электромеханические устройства, которые могут выполнять ряд операций по ведению документации. «Electronic Storekeeper» есть электронная вычислительная машина с памятью, созданная для обработки различной информации и составления каталогов. Запоминающее устройство системы построено на магнитном барабане. Система «Addo—matic» хранит информацию, полученную из разных источников, и печатает необходимые документы, запоминающее устройство также построено на магнитном барабане. Устройство «Compu—tronic» может вести торговые счета, составлять и печатать копии документов. Устройство «Post—tronic» состоит из машины, ведущей бухгалтерские книги и ведомости, читающего устройства и печатающего устройства. Автоматическая пишущая машинка «Flexowriter SPD» может читать и перепечатывать документы, а также выполнять табулирование. При использовании некоторого добавочного оборудования гибкость работы устройства может быть значительно повышена. С «Elexowriter SPD» может также соединяться десятичное вычислительное устройство «Friden Computyper CTS—816—D», тогда система может автоматически переводить, например, вес, выраженный в фунтах, в метрическую систему весов.

С. А. Раскутин

9 В361. АПАР — система автоматического программирования и регистрации. Bachand G. R., Rogers J. L., Marker T. F. APAR, Automatic programming and recording. «Proc. East. Joint Comput. Conf., Philadelphia, Pa, 1958». NT—114. New York, 1959, 130—133. Discuss., 133 (англ.)

Рассматриваются основные принципиальные узлы программноуправляемой системы АПАР (APAR), которая снимает показания с выхода большого количества датчиков, преобразует их в цифровую форму и записывает на перфоленту или магнитную ленту. Стандартный блок системы рассчитан на работу с 24 входными каналами. Увеличение числа каналов достигается увеличением числа блоков. Все схемы предполагается выполнить на транзисторах. Первое использование системы намечается в программе испытания оружия. В. И. Смирнов

9 В362. Программы для исследования нестационарных процессов в реакторных системах, используемые на машине «Ферранти—Меркурий». Roberts B. E. Programmes for the investigation of the transient behaviour of reactor systems using the Ferranti Mercury computer. «Codes Reactor Computat. Vienna, 1961, 39—51. Dosciss., 95—97 (англ.; рез. франц., русск., исп.)

Описываются программы, разработанные Управлением по атомной энергии Великобритании в Рисли, которые используются на вычислительной машине «Меркурий» для проведения вычислений, связанных с расчетом реакторных систем в неустановившихся режимах. Предлагаемые программы дают возможность решать системы большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Метод решения основан на использовании неявных разностных формул. Прямое решение получающихся при этом неявных уравнений при наличии нелинейностей невыгодно, поэтому для решения этих уравнений применяется метод итераций. Предлагаемый метод является устойчивым по отношению к накоплению ошибок в процессе решения. Имеется возможность легко менять шаг интегрирования автоматически или вмешательством оператора. Программы построены таким образом, чтобы можно было проводить различные расчеты с минимальным количеством дополнительного программирования. С. А. Раскутин

9 В363. Код 05R — реактивный код Монте-Карло общего назначения для вычислительной машины IBM-704. Coveyou Robert R., Sullivan Joseph G., Carter Harvey P. The 05R code: a general—purpose Monte Carlo reactor code for the IBM 704 computer. «Codes Reactor Computat». Vienna, 1961, 267—273. Discuss., 301—304 (англ.; рез. франц., русск., исп.)

Сообщается о проведении на машине IBM-704 расчетов реакторов при помощи специального реакторного кода 05R. При этом используется метод Монте-Карло. Исследуемый стохастический процесс движения быстрых нейтронов имитируется вычислением движения случайно выбранного нейтрона. Результаты большого числа таких вычислений могут быть использованы при анализе работы реактора. Процесс имитации движения нейтрона (составление его истории) состоит в следующем: исходя из какого-либо распределения, выбирается место появления нейтрона; выбирается его скорость (величина скорости определяется из спектра энергии деления нейтронов, ее направление выбирается, исходя из изотропного распределения); определяется начальный статистический «вес» нейтрона (введение этой величины позволяет легко определить вероятность появления двух нейтронов в результате столкновения, а также упростить ряд расчетов); затем из экспоненциального закона распределения выбирается длина свободного пробега нейтрона. Из всех этих данных вычисляется место столкновения нейтрона с атомом. Эти столкновения предполагаются рассеивающими. Для учета влияния поглощающих столкновений вводится вероятность выживания нейтрона. Вес нейтрона после столкновения принимается равным прежнему весу, умноженному на вероятность выживания. Вычисляется скорость нейтрона после столкновения, при этом если окажется, что энергия нейтрона меньше некоторой определенной величины, то нейтрон относится к числу тепловых и в дальнейшем не учитывается. Чтобы повысить гибкость вычислений, программа, составляющая истории нейтронов, отделена от программы анализа. Полученные истории нейтронов записываются на ленту и воспроизводятся в качестве входных данных для различных анализов, проводимых для расчетов величин, необходимых для решения данной проблемы. Для сокращения расхода машинного времени обработка историй нейтронов ведется параллельно, по 200—1000 историй одновременно. Описан принцип генерации псевдослучайных чисел, примененный в 05R. Оценка работы кода 05R может быть получена из решения задач, которые имеют ана-

литическое решение. В качестве примера приводится решение ряда задач при помощи кода 05R.

С. А. Раскутин

9 В364. Анализ переходных процессов в криотронных цепях с помощью имитации на вычислительной машине. Haynes Munro K. Transient analysis of cryotron networks by computer simulation. «Proc. IRE», 1961, **49**, № 1, 245—257 (англ.)

Описывается общий метод изучения переходных процессов в сложной динамической нелинейной системе при помощи имитации на цифровой вычислительной машине. В частности этот метод может быть использован для анализа цепей, построенных на криотронах. Так как всякие переделки в цепях, содержащих криотронные элементы, чрезвычайно затруднительны, предлагается производить предварительный анализ процессов в таких цепях при помощи описанного метода. В основе метода лежит тензорная запись законов Кирхгофа для контурных токов. Указываются методы решения полученных уравнений. Влияние паразитных емкостей не учитывается. Программа построена по принципу компилирующей программы, при этом нет необходимости вводить в машину дифференциальные уравнения исследуемой сети. Входные данные, записанные на перфокартах, содержат необходимую информацию об исследуемой сети и о свойствах применяемых криотронов. Предполагается, что при дальнейшем развитии такой программы для создания какой-либо сети достаточно будет вводить в машину только логические формулы нужной сети. Описанные программы применялись на машине IBM-704 для изучения переходных процессов в некоторых цепях. В частности приводятся результаты исследования триггера, замкнутой кольцевой цепи с пятью состояниями в автоколебательном режиме и трехразрядного двоичного сумматора, использующих криотроны.

С. А. Раскутин

9 В365. Анализ релейных схем при помощи машины. Пархоменко П. П. «Автоматика и телемеханика», 1959, **20**, № 4, 486—497 (рез. англ.)

Описывается специализированная машина для анализа релейных схем. Показывается, что использование метода разложения схем на конституенты единицы (Гаврилов М. А., Теория релейно-контактных схем, Изд-во АН СССР, 1951) дает простую реализацию в машине. Описывается работа машины при структурном анализе и при определении последовательности действия элементов схемы во времени. Ввод анализируемой схемы в машину осуществляется вручную при помощи шнуровых пар на штепсельной доске машины, где набирается анализируемая схема.

В. Н. Родин

9 В366. Статистический анализ характеристик логических цепей в двоичных системах. Nussbaum E., Irland E. A., Young C. E. Statistical analysis of logic circuit performance in digital systems. «Proc. IRE», 1961, **49**, № 1, 236—244 (англ.)

Рассматриваются логические системы, содержащие большое количество элементов, параметры которых нерегулярным образом отличаются от расчетных значений. Вместо обычно применяемого метода расчета, исходящего из наихудшей возможной ситуации, предлагается статистический подход к определению допусков на возможные отклонения параметров, предполагающий, что весьма маловероятные отклонения характеристик системы допустимы. Рассматриваются два метода расчета, причем в первом используется малость отклонений всех параметров для разложения соответствующих характеристик в ряд Тейлора, а второй предполагает использование счетных машин и опирается на метод Монте-Карло. Рассмотрен расчет конкретных схем, показывающий преимущества статистического подхода.

В. П. Яковлев

9 В367. Распознавание букв с использованием автокорреляции. Horwitz L. P., Shelton G. L., Jr. Pattern recognition using autocorrelation. «Proc. IRE», 1961, **49**, № 1, 175—185 (англ.)

Рассматриваются вопросы, связанные с узнаванием букв машинами. Разобьем плоскость, на которой нарисована буква, на мелкие квадратики, причем пусть буква занимает матрицу размера $N \times N$, которая находится где-то внутри матрицы $-(N-1) \leqslant x, y \leqslant N-1$ порядка $2N-1$ (x, y — координаты центров квадратиков). Положим $D(R) = \Sigma_r f(r) f(r-R)$, где $f(r)=1$, если квадратик r попал на зачерненную часть буквы и $f(r)=0$, если r попал на светлую часть (суммирование берется по элементам r матрицы $-(N-1) \leqslant x, y \leqslant N-1$, $f(r)$ считается продолженной периодически на плоскость). Важно, что $D(R)$ не меняется при сдвигах буквы внутри большей матрицы. В работе описаны схемы некоторых приборов, служащих для сравнения $D_A(R)$, где A — неизвестная буква, с $D_B(R)$, где B — известная буква.

В. Н. Тутубалин

9 В368. Статистические функции решения и конструирование машин для распознавания букв. Marill T., Green D. M. Statistical recognition functions and the design of pattern recognizers. «IRE Trans. Electronic Comput.», 1960, **9**, № 4, 472—477 (англ.)

Обозначим через $X\{X_1, X_2, \ldots, X_p\}$ результаты измерения некоторых величин, связанных с нарисованной от руки буквой (одной из m возможных букв). Априорные вероятности всех букв предполагаются равными; предполагается также, что если нарисована k-буква, то плотность распределения $p_k(X)$ вектора X является нормальной, причем матрица ковариаций не зависит от k. Параметры распределения оцениваются по выборке и затем строится байесовская решающая функция для узнавания буквы по наблюденной величине X. Приводятся результаты опыта при $m=3$ (с буквами A, B, C): ошибка наблюдалась в одном случае из 30.

В. Н. Тутубалин

9 В369. Логика чтения по методу парных точек. Bailey J. M., Jr. Point—pair reading logic. «Proc. IRE», 1960, **48**, № 12, 2032—2033 (англ.)

Рассматриваются две схемы машины, предназначенной для распознавания букв алфавита. Изображение буквы раскладывается на N точек. Каждая схема машины предполагает, что в памяти машины хранятся два изображения каждой буквы алфавита, полученные от различных источников. Когда неизвестная буква вводится в машину, последняя по одному из описанных методов формирует суммы (меры подобия), характеризующие подобие неизвестной буквы и каждой из хранящихся в памяти букв. Машина указывает на ту букву, которая имеет наибольшую меру подобия. При первом методе опознавания — методе подсчета числа совпадающих точек — мера подобия определяется числом точек, совпадающих у неизвестной буквы с каждой из хранящихся в памяти букв. Второй метод — метод парных точек — состоит в том, что каждая точка образует пары с любой другой точкой. Мерой подобия каждой буквы является число совпадений пар состояний точек неизвестной буквы с парами состояний точек букв алфавита, хранимых в памяти. Проводится исследование возможностей второго метода. Указывается, что хотя эффективность второго метода может быть показана на многочисленных примерах, в некоторых случаях он может привести к ошибке.

С. А. Раскутин

9 В370. Вычислительные модели в динамической экономике. Cohen Kalman J., Cyert Richard M. Computer models in dynamic economics. «Quart J. Econ.», 1961, **75**, № 1, 112—127 (англ.)

Исследуются возможности использования вычислительных машин для имитации поведения экономических систем. При изучении поведения экономической системы наряду с аналитическим исследованием может использоваться цифровая вычислительная модель этой

системы. При этом описание поведения системы получается в виде чисел, характеризующих последовательные состояния системы. Таким путем можно исследовать самые различные экономические процессы, например, влияние изменения некоторых параметров на поведение системы. Экономические системы характерны тем, что их общее поведение наблюдать сравнительно легко; проблема состоит в том, чтобы подобрать вычислительную модель для имитации поведения отдельных ее компонент. Проводится сравнение описанных вычислительных моделей с эконометрическими моделями. Указывается на следующие трудности, возникающие при создании вычислительных моделей: выбор наиболее эффективной формы уравнений, лежащих в основе вычислительной модели, оценка влияния всех параметров системы, оценка применимости вычислительной модели. В качестве примеров описываются вычислительные модели для различных экономических систем: вычислительная модель домашнего хозяйства, вычислительная модель экономики фирмы в условиях конкуренции, некоторые модели экономики целых областей промышленности, например, обувной промышленности и т. д. Указывается, что введение вычислительных моделей должно рассматриваться как дополнение существующих методов, а не их замена. Основным достоинством вычислительной модели является то, что она дает язык, с помощью которого могут конструироваться сложные динамические модели. Вычислительные модели прокладывают мост между теоретическими и эмпирическими исследованиями. С. А. Раскутин

9 В371. Цифровое вычислительное устройство для программирования кривых второго порядка. Ян Сизен. «Автоматика и телемеханика», 1961, 22, № 3, 359—368 (рез. англ.)

Описывается специализированное вычислительное устройство, вырабатывающее программы для металлорежущих станков с программным управлением, которые производят обработку профилей, состоящих из отрезков прямых и кривых второго порядка. Принцип работы устройства аналогичен принципу работы цифрового дифференциального анализатора. Для вычисления координат эллипса и гиперболы выводятся уравнения:

$$y_{i+1} = y_{i-1} \pm \frac{\omega}{a} x_i, \quad x_{i+2} = x_i + a\omega y_{i+1}.$$

Предлагаются схемы вычислительных устройств с сумматорами последовательного и параллельного действия для отработки этих алгоритмов. Исследуются причины возникновения погрешностей в таком вычислительном устройстве и оценивается величина этих погрешностей. Предлагаются методы уменьшения погрешностей. Работа описанного устройства была промоделирована на машине «Урал-1», при этом производилась оценка положительных и отрицательных погрешностей. С. А. Раскутин

9 В372. Использование вычислительных машин в процессах управления. Шрейдер Ю. А. В сб. «Кибернетика и автоматиз. трансп. процессов». М., Транжелдориздат, 1960, 89—94

Общее описание применения вычислительных машин для управления различными процессами. С. А. Раскутин

9 В373. О современных электронных вычислительных машинах. Базилевский Ю. Я. В сб. «Кибернетика и автоматиз. трансп. процессов». М., Транжелдориздат, 1960, 80—88

Статья общего характера.

9 В374. Быстродействующая печатающая система «Берроуз-220». Bauer F. W., King P. D. The Burroughs 220 high-speed printer system. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif.», 1959. New York, 1959, 212—217 (англ.)

При разработке описанного в статье печатающего устройства фирма «Берроуз» (Burroughs) поставила задачу создания такой системы, которая не только обладала бы высоким быстродействием, но и была бы способна печатать самые разнообразные документы, удовлетворяя большинству требований потребителей. Для получения высокой скорости и обеспечения независимости работы машины, обрабатывающей данные, и получающего от машины информацию печатающего устройства, между ними в качестве буферного запоминающего устройства для временного хранения данных может использоваться блок магнитной ленты. Система 220 построена на транзисторах и управляется с помощью клавиатуры. В состав системы входит блок печати (printing unit) и блок управления печатью (printer control unit). Она предназначена для работы либо при непосредственном соединении с вычислительной машиной (Burroughs 220 Data Processor), либо совместно с одним или двумя стандартными блоками памяти на магнитной ленте (Burroughs 220 magnetic tape storage unit). Блок управления печатью содержит буферное запоминающее устройство с произвольной выборкой на магнитных сердечниках с емкостью в 1100 знаков (или 100 чисел), схемы управления, два 120-значных регистра, источник питания на транзисторах и клавиатуру. В блок печати входит печатающее устройство барабанного типа, имеющее 120 позиций печати, с плотностью 4 знака на 1 *см*, всего по 51 знаку на позицию печати (т. е. на образующей барабана располагается 120 знаков, а в каждом из 120 знаков «колец» имеется 51 знак). Среди знаков имеется 15 специальных: символы CR, OD, DR, + — и др. Кроме того, в блоке печати имеется устройство для протяжки бумаги и источник питания для привода печатающего механизма. Кроме оригинала, можно печатать до пяти копий (через копирку). Управление протяжной бумаги осуществляется с помощью семи-канальной бумажной кольцеобразной перфоленты, кодированная программа с которой считывается фотоэлектрическим устройством. Бумага протягивается со скоростью 64 *см/сек*. Печатающий барабан может делать в 1 мин. 750, 900, 1500 или 1800 оборотов. Печать буквенной информации может осуществляться со скоростями 624, 720, 1068 и 1225 строк в 1 мин. Скорость печати чисто цифровых данных составляет 750, 900, 1500 или 1225 строк в 1 мин. В случае, если информация из буферного запоминающего устройства печатается не подряд, то управление порядком печати производится с пульта управления. Система обладает рядом специальных возможностей (проставляет запятые и десятичные точки в числах, может производить вычеркивание, повторно печатает любую информацию и др.). Имеется система автоматического контроля правильности передачи данных и их печати. Сигналы о наличии ошибок передаются на клавиатуру для выполнения операций исправления печати, причем исправленное место на бумаге особым образом отмечается. В. А. Брик

9 В375 К. Описание системы команд электронной вычислительной машины «Стрела-3». Изд. 2-е, испр. Стрелкова Н. Н. М., Вычисл. центр АН СССР, 1961, 50 стр., илл., 19 к.

В книге дана общая характеристика электронной вычислительной машины «Стрела-3». Описаны выполняемые ею операции, а также содержатся замечания, которые помогут при составлении программ для машины «Стрела-3». М. К. Керимов

9 В376 К. Элементы и схемы цифровых вычислительных машин. Richards R. K. Calculateurs numériques éléments et circuits. Trad. Paris, Dunod, 1959, XV, 522 p., ill. (франц.)

9 В377 К. Автоматические цифровые вычислительные машины. Wilkes M. V. Calculatrices numériques automatiques. Trad. Paris, Dunod, 1959, XII, 392 p., ill. (франц.)

См. также: 9А2, 9В139, 9В309, 9В311

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Перед номерами рефератов опущены номер и индекс 9В выпуска)

А

Азбелев Н. В. 262
Алексеев А. И. 185
Алексеев А. С. 174

Б

Базилевский Ю. Я. 373
Басс Ф. Г. 206
Беркович Ф. Д. 285
Бурцев П. Е. 270

В

Вайнштейн М. Я. 351
Вахитов М. Б. 263
Вентцель А. Д. 71

Г

Гнеденко Б. В. 234, 253
Гихман И. И. 70
Гуткин Л. С. 200

Д

Джишкариани А. В. 275
Добрушин Р. Л. 196
Доморяд А. П. 313
Дроздов Н. Д. 298

Е

Ермаков С. М. 295

З

Загускин В. Л. 280
Зингер А. А. 28
Золотухин В. Г. 295
Зуховицкий С. И. 141

И

Ибрагимов И. А. 31
Игнатьев Н. К. 203
Ито К. 85 К

К

Казда Л. Ф. 269
Казинский В. А. 324 К
Канер Э. А. 206
Карцев М. А. 347
Кимура М. 210
Коваленко И. Н. 40
Ку Чэн 269

Л

Левит Д. Е. 271
Леонов В. П. 38
Литвинов М. В. 274

М

Мешковский К. А. 197
Миками М. 227
Мори М. 211
Мустафин Х. А. 53

Н

Нагаев С. В. 42

П

Пак И. Н. 301
Пань И-минь 4
Пархоменко П. П. 365
Положий Г. Н. 268
Потапов М. К. 95
Пропастина Г. С. 267

Р

Рахматулин Х. А. 271
Розанов Ю. А. 74
Романовский И. В. 151
Ронжин В. И. 233

С

Сабараги И. 210
Сакагучи М. 88
Сарманов О. В. 15, 16
Сарымсаков Т. А. 53
Смирнов С. В. 95
Смолин И. М. 262
Соболь И. М. 279
Со Ын-чон 114
Станулов Н. 189
Стратонович Р. Л. 205
Стрелкова Н. Н. 375 К
Студнев Ю. П. 33—35
Сугаи Н. 210

У

Уиндекнехт Т. 269

Ф

Файнстейн А. 255 К

Х

Хазен Э. М. 208
Хургин Я. И. 196

Ц

Цалюк З. Б. 262
Цыбаков Б. С. 196

Ч

Чернин К. Е. 31
Чистяков В. П. 62

Ш

Шайдуков Г. М. 276, 277
Ши Чжун-ци 284
Шрейдер Ю. А. 372

Ю

Юшкевич А. А. 66

Я

Яковлев В. П. 76
Ян Си-зен 371

A

Adolph A. R. 236
Akaike H. 79, 202
Amundson N. R. 170
Anderson T. W. 131 K
Ansorge R. 282
Aoyama H. 251
Aris R. 170
Arrow K. (Ed.) 257 K
Asano C. 242
Aumann G. 145

B

Bachand G. R. 361
Bahadur R. R. 118
Bailey J. M. Jr 369
Baker C. T. 169
Balakrishnan A. V. 78
Band W. 254 K
Bankier J. D. 98
Barra J.-R. 113
Basten R. 357
Bates F. 310
Bauer F. W. 374
Bechhofer R. E. 99, 128
Bell C. B. 112
Berger M. J. 305
Bergström H. 39
Berin A. 303
Bertram G. 142
Bharucha-Reid A. T. 84 K
Biggers J. D. 103
Birnbaum Z. W. 115
Blanc-Lapierre A. 188
Block H. D. 249
Blum J. R. 7
Blyth C. A. 156
Boccia S. 48
Böhm J. 235
Boyd K. T. 147
Brambilla F. 168, 181 K
Breiman L. 55, 59
Brown T. M. 166
Brunk H. D. 130 K
Burke C. 49
Burke P. J. 216
Burla N. 352
Busca F. 162
Butler R. 296

C

Carter R. R. 363
Castoldi L. 61
Černý V. 311
Cerrillo M. V. 321
Ceschino F. 258
Chang S. S. L. 209
Chao S. K. 331
Charnes A. 175
Chartier F. 230
Cherubino S. 158
Chorneyko I. 124
Clerc D. 283
Cohen A. C., Jr. 238
Cohen K. J. 370
Collatz L. 266
Comrie L. J. 323 K
Conolly B. W. 213
Cooper W. W. 175
Coveyou R. R. 306, 363
Cureton E. E. 110
Cyert R. M. 370

D

Dahm P. A. 243
Dall'Aglio G. 13

Das M. N. 97
Davis G. B. 154
Derwidué L. 288
Diederich F. W. 204
Dodd S. C. 252
Dood J. L. 45
Doyen J. T. 359
Drenick R. F. 224
Dreyer H. J. 357
Dreyfus P. 329
Dugué D. 132 K
Dumontet P. 188
Dupač V. 81
Dwass M. 120
Dzielinski B. P. 169

E

Epstein B. 237

F

Feldt L. S. 101
Finch H. A. 90
Finch P. D. 212, 218
Fisz M. 44, 72
Fréchet M. 14, 144
Freiman C. V. 354
Fox L. 322
Freiman C. V. 194, 195
Frisch R. 157

G

Garcia-Colin L. S. 186
Garvin W. W. 178 K
Geffroy J. 41
Geisser S. 102
Gélard J. 264
Gesdorf 336
Ghosh J. 129
Ghurye S. G. 25
Giffler B. 173
Gillis J. 51
Girault M. 82 K
Glomb J. D. 287
Gluesing E. C. 342
Gnanadesikan R. 94
Goldman A. J. 136
Green A. 353
Green D. M. 368
Green L. 318
Greenhouse S. W. 102
Greenwald D. U. 180 K
Gridgeman N. 12
Gumbel E. J. 21
Gurland J. 243
Guthrie D. 225

H

Haldane J. B. S. 23
Hall R. A. 115
Halle M. 340
Halperin M. 119
Halphen E. 11
Hammersley J. M. 304
Hannan J. 140
Hanson D. L. 7
Harris E. K. 250
Harrower A. R. 359
Hayman B. I. 241
Haynes M. K. 364
Hennequin P.-L. 57
Hensley C. 239
Henze E. 50
Herschbach D. R. 320
Hickman T. C. 334
Hida T. 75
Hoch I. 164
Hoeffding W. 127
Homma T. 219
Horwitz L. P. 367
Houthakker H. S. 153
Hsu Lee-tsch C. 293
Hsu L. C. 294
Hudimoto H. 107
Hughes G. W. 340
Hunt G. A. 68
Hunt G. C. 220

I

Iijima T. 337
Ikeda S. 192
Imoto K. 337
Irland E. A. 366

J

Jacobs K. 52
Jansson B. 139
Jentsch W. 286
Johns M. V., Jr. 225
Jowett G. H. 125

K

Kallianpur G. 6
Kalmár L. 348
Kämmerer W. 330
Kanner H. 327
Kaptein E. 163
Karlin S. 63 (Ed.) 257 K
Katz M. 43
Kautz W. H. 321
Kemeny J. G. 58, 64
Kennedy M. 247
Kesten H. 80
Kiefer J. 96, 143
Kim W. H. 194, 195
King P. D. 374
Klein M. 177
Klinken J. van 92
Klotz J. 121
Kolchin E. K. 318
Kraft C. H. 5
Krelle W. 149
Krishna Iyer P. V. 24
Krzywóblicki M. Z. v. 272
Kuhns J. L. 343
Kuiper N. H. 89
Kuntzmann J. 258
Kurkjian L. H. 335
Kuzenko W. 328
Kustaanheimo P. 300

L

Laha R. G. 19
Lamperti J. 54, 248
Lancaster H. O. 17, 18, 29
Lange O. 165, 167
Lapeyre R. 259
Laudet M. 259
Lawley D. N. 104
Lee I. 243
Lee Yuk Wing 256 K
Lehman M. 352
Leiner A. L. 332
Lévy A. 265
Levy J. 176
Lévy P. 26
Loizelier E. B. 172
Lubbock J. K. 198
Lubkin S. 302
Luchak G. 214
Lukacs E. 19

M

MacAdam W. K. 190
Macdonald N. 308
McFadden J. A. 20
McGregor J. R. 106
Madarász B. 355
Mahmoud M. W. 101
Malécot G. 67
Mansfield E. 239
Marek A. 311
Marill T. 368
Marimont R. B. 332
Marker T. F. 361
Maron M. E. 343
Marschak J. 249
Marshall A. W. 22, 32
Martin H. 309
Masani P. 73
Matsushima S. 318
Matthys G. 150
Maxwell A. E. 244
Mayer J. 1
Mayer J. E. 184
Medina A. 201
Metropolis N. 345
Mikolajska Z. 291
Miller H. D. 222
Moriguti S. 228
Morimura H. 2
Morishima M. 159
Müller M. 183

N

Narayana T. V. 124
Neveu J. 65
Newell G. F. 221
Nikaidô H. 161
Notz W. A. 332
Nussbaum E. 366

O

Okumura Y. 337
Olkin I. 22
Onicescu O. 299
Osiński Z. 314
Overall J. E. 152

P

Parodi M. 289 П
Passelecq D. 281
Patterson H. D. 108
Pawlak Z. 326
Pawlik K. 109
Peretti J. 186
Perkal J. 245
Pfanzagl J. 86
Porter R. E. 333
Pratt J. W. 5
Prinz D. G. 148
Prosperi G. M. 187
Prouza L. 77
Pyke R. 47

R

Ralston A. (Ed.) 316 K
Rao R. R. 36
Raso D. J. 305
Raut K. C. 97
Reich E. 215
Reimann J. 116
Renier A. 105
Richards R. K. 376 K
Richter W. 37
Roberts B. E. 362
Rocheleau G. 331
Rogers J. L. 361
Rosenberg L. 177
Rosenblatt M. 49, 60
Rotenberg A. 307
Roy B. 223
Roy J. 91
Rudd D. F. 170
Rybner J. 315 K

S

Sakaguchi M. 87
Sathe Y. S. 124
Sauer R. 344
Schild A. 171
Schmidt H. 133 K
Scotti A. 187
Seidenberg A. 5
Shapiro H. S. 193
Shelton G. L., Jr 367
Sherman H. 338
Silverman R. A. 207
Slotnick D. L. 193
Small W. A. 9
Smith J. H. 232
Smith J. L. 332
Snell J. L. 45, 58, 64
Sobel 231
Solomonoff R. 341
Somermeijer W. H. 111
Steel R. 350
Steinhaus H. 135
Stevens W. L. 240
Stockton R. 179 K
Stone J. J. 136
Störmer H. 93
Strachey C. 346
Strassman A. J. 335
Stroud A. H. 292, 297
Sullivan J. G. 363
Suppers P. 248, (Ed.) 275 K
Suschowk D. 123
Suzuki Y. 226
Sydow A. 261
Szczotka F. 245

T

Takács L. 217
Takahashi S. 337
Takano K. 191
Teodorescu P. P. 273
Theil H. 163
Thomas J. B. 199
Thomasian A. J. 43
Thompson G. L. 173
Thorp E. 10
Tischendorf J. A. 231
Törnig W. 260
Trong Lieu B. 126
Turowicz A. B. 290

U

Ueno T. 69
Unger S. H. 339

V

Vacca R. 325
Vadnal A. 83 K
Vajda S. 146
Varadarajan V. S. 36
Venulet J. 246
Vincze E. 155
Vincze I. 116
Völcker E. 349
Volkmann B. 134
Vorobiev N. N. 137, 138

W

Wada H. 337
Wallace D. L. 25
Wang Tzu-kwen 56
Weiss L. 117
Whittle P. 27
Wilf H. S. 278, 316 K (Ed.)
Wilkes M. V. 377 K
Williamson R. E. 45
Wintner A. 30
Wójcik R. 246
Wolf E. 317
Wolfowitz J. 143
Wong E. 199
Woodworth F. M. 312
Wormleighton R. 122
Wright W. M. 125
Wurtele Z. 160

Y

Ylvisaker N. D. 100
Young C. E. 366

Z

Zaludova A. H. 229
Zítek F. 46
Zoroa P. 8
Zoutendijk G. 182 K

Поправки

К реф. 1В300 (1961)

13 строка сверху, вместо «уравнение Соро» следует читать «определитель Соро».

К реф. 2В160

В левой колонке, 5 и 6 строка снизу, вместо $h \to \infty$ следует читать $h \to 0$.

К реф. 3В262

2 строка снизу, вместо «-ки нужно разрезать данную заготовку таким образом,» следует читать «-ки данных РАМАК выпускается в двух несколько от-»

К реф. 4В48

12 строка снизу, вместо «линейной связной» следует читать «линейно связной (arcwise connected)».

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

Реферативный журнал издается в следующих сериях:

АВТОМАТИКА И РАДИОЭЛЕКТРОНИКА — Главный редактор канд. техн. наук *А. С. Бучинский*, АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ — Главный редактор профессор *К. Ф. Огородников*, БИОЛОГИЯ — Главный редактор канд. биол. наук *В. П. Доброхвалов*, ГЕОГРАФИЯ — Главный редактор доктор геогр. наук *А. А. Насимович*, ГЕОЛОГИЯ — Главный редактор профессор *Е. Е. Захаров*, ГЕОФИЗИКА — Главный редактор профессор *И. А. Хвостиков*, ГОРНОЕ ДЕЛО — Главный редактор докт. техн. наук *Е. М. Фаерман*, МАТЕМАТИКА — Главный редактор докт. физ.-мат. наук *Р. В. Гамкрелидзе*, МАШИНОСТРОЕНИЕ — Главный редактор канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг*, МЕТАЛЛУРГИЯ — Главный редактор член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев*, МЕХАНИКА — Главный редактор академик *Л. И. Седов*, ТРАНСПОРТ — Главный редактор канд. техн. наук *В. Т. Осипов*, ФИЗИКА — Главный редактор профессор *Э. В. Шпольский*, ХИМИЯ — Заведующий отделом профессор *В. В. Кафаров*, ЭКОНОМИКА ПРОМЫШЛЕННОСТИ — Главный редактор профессор *С. М. Лисичкин*, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА — Главный редактор профессор *Б. М. Тареев*

СОДЕРЖАНИЕ

СВОДНОГО ТОМА РЖ «МАТЕМАТИКА» № 9 ЗА 1961 г.

9А. Общие вопросы	9А1
История математики. Персоналия	9А23
Преподавание математики	9А54
Основания математики и математическая логика	9А107
Теория чисел	9А123
Алгебра	9А168
Многочлены и линейная алгебра	9А174
Группы	9А211
Поля, кольца, алгебры и структуры	9А259
Алгебраическая теория схем связи и управления	9А320
Топология	9А344
Геометрия	9А437
Приложения геометрии	9А439
Элементарная геометрия	9А444
Аналитическая геометрия	9А459
Проективная и неевклидовы геометрии	9А471
Начертательная геометрия	9А488
Алгебраическая геометрия	9А501
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства	9А516
Геометрия n-мерного пространства	9А536
Теория относительности	9А569
Глобальная теория дифференцируемых многообразий	9А576
Метрические методы в геометрии	9А584
Выпуклые многообразия	9А588
Авторский указатель	
9Б. Теория функций действительного переменного	9Б1
Теория множеств	9Б22
Приближение функций полиномами и их обобщениями	9Б39
Теория функций комплексного переменного	9Б48
Дифференциальные уравнения	
Обыкновенные дифференциальные уравнения	9Б117
Уравнения в частных производных	9Б166
Приложения к физике, технике и естественным наукам	9Б229
Интегральные уравнения	9Б302
Вариационное исчисление	9Б314
Анализ (другие вопросы)	9Б333
Числовые ряды	9Б355
Специальные функции	8Б376
Интегральные преобразования и операционное исчисление	9Б384
Приложения общих методов математического анализа	9Б390
Функциональный анализ	9Б397
Авторский указатель	
9В. Теория вероятностей и математическая статистика	
Теория вероятностей	9В1
Математическая статистика	9В86
Теория игр, исследование операций и математическая экономика	9В134
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов	9Б183
Численные и графические методы	9В258
Таблицы	9В317
Вычислительные машины и математические приборы	9В325
Применение вычислительных машин	
Авторский указатель	—

Цена 38 к.
24 к. для индивидуальных подписчиков

П. ЯЩ. 1598
ТЕХ. БИБЛИОТЕКА
7 1.12.62 ТВ

ОТКРЫТА ПОДПИСКА

НА РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР

МАТЕМАТИКА

на 1962 год

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПОДПИСЧИКОВ

на сводный том и выпуски сводного тома

СНИЖЕНА до 25%

Журнал рассчитан на широкий круг математиков и лиц, работающих в смежных с математикой областях науки и техники, и дает информацию об опубликованных в мировой литературе научных работах по всем разделам математики и многим ее приложениям.

К годовому комплекту сводного тома будут изданы авторский и систематическо-предметный указатели.

Для удобства читателей часть тиража сводного тома издается в виде трех выпусков.

Подписка принимается с любого очередного номера.

Условия подписки:

СВОДНЫЙ ТОМ	Для организаций	Для индивид. подписчиков
На год (за 12 номеров с указателями) . . .	30-40	19 00
На 6 мес. (за 6 номеров без указателей) . . .	12-96	8-10

ВЫПУСКИ СВОДНОГО ТОМА без указателей	Для организаций		Для индивид. подписчиков	
	на год	на 6 мес.	на год	на 6 мес.
1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ	9-36	4-68	5-88	2-94
2. АНАЛИЗ	10-80	5-40	6-72	3-36
3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. КИБЕРНЕТИКА	5-76	2-88	3-60	1-80

Подписка принимается без ограничения в пунктах подписки «Союзпечать», почтамтах, конторах и отделениях связи, общественными уполномоченными на заводах, фабриках и шахтах, в учебных заведениях и учреждениях.

Заказы можно направлять также в Отдел подписки и реализации Производственно-издательского комбината ВИНИТИ по адресу:

г. Москва, Люберцы-6, Октябрьский проспект, 403
Р/сч. 58526 в Люберецком отделении Госбанка г. Москвы